ALGEBRE DE BOOLE

Chapitre 1 : généralités.
Chapitre 2 : minimisation des fonctions.

Chapitre 1 : généralités : grandeurs et fonctions booléennes.

On rencontre fréquemment des grandeurs ayant deux états et deux seulement :

une relation est «VRAIE » ou «FAUSSE »
un interrupteur est «OUVERT» ou «FERME »
un transistor «CONDUIT» ou «NE CONDUIT PAS »
un support magnétique peut être aimanté de haut en bas ou de bas en haut,
etc..

Ces grandeurs sont dites «Booléennes» du nom de leur inventeur et formalisateur Boole. Pour unifier l'étude des fonctions booléennes, on unifie les notations en utilisant les deux symboles 0 et 1 avec par exemple les conventions

VRAI ,OUVERT, CONDUIT, etc... sont notés 1 par convention,
FAUX, FERME, NE-CONDUIT-PAS, etc... sont notés 0 par convention.

1 et 0 sont des symboles purement conventionnels (on pourrait les permuter, ou choisir 1 et 2, - et +, etc..) ; ce ne sont pas des chiffres ; les opérations arithmétiques doivent être oubliées dans cette étude.

Toujours par convention on définit la relation d'ordre : $\boxed{0 < 1}$

REMARQUE: relation entre l'algèbre de Boole et l'algèbre ensembliste:
Les deux algèbres sont identiques même si les notations diffèrent::
par exemple dire qu'un objet a appartient à un ensemble A revient à dire que la fonction *appartient(A,a)* est VRAIE.
De même dire qu'un objet x appartient à l'union de deux A et B revient à dire que *appartient(A,x)=VRAI* ***ou*** *appartient(B,x)= VRAI* Ceci se généralisera à toutes les fonction propriétés dans les deux algèbres .

1.1. Fonctions booléennes, généralités

D’une façon générale on s’intéresse aux applications de $\{0,1\}^n$ dans $\{0,1\}$ou "fonctions booléennes".

1.1.1. fonctions d’une variable.

Une fonction booléenne $y = f(x)$ de la variable booléenne x peut être simplement définie « point par point », c’est à dire en donnant explicitement la valeur de la fonction pour chaque valeur de la variable. On constate qu’il y a 4 fonctions d’une variable données par le tableau suivant :

x	f0(x)	f1(x)	f2(x)	f3(x)
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Il est facile de montrer qu'il ne peut y avoir d'autres fonctions. Ainsi la fonction $f_0(x)$ est la fonction "dégénérée" constamment nulle ainsi que la fonction $f_3(x)$ constamment unité.

La fonction $f_1(x)$ est identique à x,

La fonction $f_2(x)$ est le <u>«contraire»</u> de x, appelée son **complément** et notée $\overline{x}$ (parfois x’). On peut noter ses propriétés :

$0 = \overline{1}$, $1 = \overline{0}$, et surtout $(\overline{\overline{x}}) = x$. quelque soit x

A cette fonction peut être associée la fonction "complément d'un ensemble":

$$\overline{x \in A} = x \in \neg A = x \notin A$$

1.2.2. fonctions de deux variables z = f(x,y) :

Comme précédemment elles peuvent être définies par la valeur de la fonction pour les 4 combinaisons de valeurs de x et y, c’est à dire par le tableau :

x	y	f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10	f11	f12	f13	f14	f15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

parmi ces fonctions on retrouve les fonctions constantes f0 et f15, les fonctions respectivement identiques à x et à y (f3 et f5), les fonctions compléments de x et y (f12 et f10). Les autres sont des «vraies» fonctions de x et y. Certaines ont des propriétés remarquables qui vont faire l’objet de la suite du chapitre.

1.3. fonctions ET et OU. (Treillis de Boole)

Les fonctions f1 et f7 ont des propriétés remarquables, bases de la plupart des calculs booléens :

1.3.1. fonction OU (f7)

x	y	f7
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Cette fonction est égale à 1 si x OU y sont égaux à 1, d'où son nom. Elle est égale à 0 quand x et y sont nuls.

Notation : pour la commodité on note cette fonction **x + y**, bien que + ne désigne pas l'addition arithmétique !

On remarque également qu'avec la convention $0 < 1$, cette fonction est le $\boxed{\text{maximum}}$ de x et de y. On en déduit une série de propriété classique du maximum :➔

(1) commutativité : max(x,y)=max(y,x) ou encore $\boxed{x+y = y+x}$

(2) associativité : max(x,max(y,z)) = max(max(x,y),z)
ou encore $\boxed{x+(y+z)=(x+y)+z = x+y+z}$

(3) idempotence : max(x,x)=x ou encore $\boxed{x+x=x}$ (et non 2x !)

(4) élément neutre 0 : max(x,0)=max(0,x)=x (puisque $0 \le x$) ou encore $\boxed{x+0 = 0+x = x}$

(5) 1 est absorbant : max(x,1)= max(1,x) = 1 (puisque $x \le 1$) ou encore $\boxed{x+1 = 1+x = 1}$

(6) absence d'inverse pour la somme : en raison de (5), il n'existe pas quelque soit x un élément y tel que x+y=0.

Ces propriétés confèrent à l'ensemble des grandeurs booléennes une structure dite de «demi treillis distributif»

A ces propriétés fondamentales, on peut ajouter quelques remarques intéressantes pour la suite :
(7) $x \le x+y$ par définition d'un maximum

(8) si $x \le a$, alors $x+a=a$ (idem)

Relation avec la théorie des ensembles
Comme on l'a vu ci dessus , on a:

$x \in A$ ou $x \in B$ est équivalent à $x \in B \cup C$. donc l'ensemble X des x est égal à $B \cup C$. On en déduit les propriétés d'associativité, commutativité, etc… de l'opération d'union sur les ensembles.

1.3.2. fonction ET

x	y	f1
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Cette fonction est égale à 1 si x ET y sont égaux à 1, d'où son nom. Elle est égale à 0 quand x ou y sont nuls.
Notation : pour la commodité on note cette fonction xy ou x.y

On remarque également qu'avec la convention 0<1, cette fonction est le **minimum** de x et de y. comme ci dessus, on en déduit une série de propriété classique du minimum :

(10) commutativité : min(x,y)=min(y,x) ou encore $\boxed{xy = yx}$

(11) associativité : min(x,min(y,z)) = min(min(x,y),z)
ou encore $\boxed{x(yz)=(xy)z = xyz}$

(12) idempotence : min(x,x)=x ou encore $\boxed{xx=x}$ (et non x^2 !)

(13) élément neutre 1 : min(x,1)=min(1,x)=x (puisque $x \leq 1$) ou encore $\boxed{x1 = 1x = x}$

(14) 0 est absorbant : min(x,0)= min(0,x) = 0 ou encore $\boxed{x0 = 0x = 0}$

(15) absence d'inverse pour le produit: en raison de (14), il n'existe pas quelque soit x un élément y tel que xy=1. (sauf pour x=1!) .
00
*Remarque: tout élément **non nul** (il n'y en a qu'un c'est 1) a un inverse, propriété qui sera importante pour montrer la structure de corps.*

(16) si $x \leq a$, alors $x\,a = x$. (par définition d'un minimum)

(17) $ax \leq x$ pour tout a, par définition d'un minimum.

(18)on en déduit que $x + a\,x = x$ (puisque $a.x \leq x$) c'est à dire **qu'on peut supprimer dans une somme tous les multiples d'un monôme**, exemple : a b c + a c = ac

Nota: pour les matheux:
(19) ces propriétés confèrent à l'ensemble des grandeurs booléennes une structure dite de «demi treillis distributif».

(20) Les deux fonctions ET et OU donnent à l'ensemble la structure de treillis distributif.

(21 bis) les trois fonctions ET, OU, Complément donnent à l'ensemble la structure de "treillis distributif et complémenté" appelé encore "treillis de Boole"

Remarque :** **Il y a une symétrie parfaite entre les fonctions ET et OU due à la symétrie entre les symboles 0 et 1 (si on permute les symboles 0 et 1 dans le tableau définissant le OU, on obtient la définition du ET). Cette symétrie est appelée dualité. A toute propriété ou théorème correspond la propriété ou le théorème dual.

Relation avec la théorie des ensembles
Comme ci dessus , on a:

$x \in A$ et $x \in B$ est équivalent à $x \in B \cap C$. donc l'ensemble X des x est égal à $B \cap C$. On en déduit les propriétés d'associativité, commutativité, etc… de l'opération d'intersection sur les ensembles.

(21) Distributivité de ET pour OU :
min(x,max(y,z)) = max(min(x,y),min(x,z)) ou encore $x (y + z) = x y + x z$

Cette propriété du max et du min, qui n'est peut-être pas évidente pour tous, peut se démontrer de la manière suivante :

pour démontrer que $x (y + z) = x y + x z$, on considère deux cas :
cas x=0 : à gauche: $0.(x + y) = 0$ et à droite: $0 x + 0 y = 0 + 0 = 0$ donc égalité
cas x=1 : à gauche: $1.(x + y) = x+y$ et à droite: $1.x +1.y = x + y$ donc encore égalité

cette propriété semblable à la distributivité du produit pour la somme en arithmétique simplifie la pratique des calculs, par exemple, on développera facilement des expressions telles que (a+b+c)(d+e)(f+g+h) comme en algèbre classique.

A ces propriétés fondamentales, on peut ajouter comme précédemment les propriétés évidentes suivantes :

(22) distributivité de OU pour ET
par dualité on déduit de (17) la propriété moins évidente : $x+yz= (x+y)(x+z)$
sans utiliser la dualité, on pourrait développer :
$(x + y) (x + z)= x x + x z + y x + y z = x + x z + x y + y z$ d'après (21)
$= x + y z$ d'après la remarque (18) ci dessus, puisque $x z \le x$ et $x y \le x$

Nota : pratique des calculs :

Le développement d'expression donnera en général lieu à de nombreuses simplifications ; exemple :

A= (a + b + c) (a + b + d) = a a + a b + a d + $\cancel{a}$ b + b b + b d + a c + b c + c d

expression qui se simplifie en supprimant les monômes répétés (idempotence du produit et de la somme):

A = a + $\cancel{a}$b + $\cancel{a}$d + $\cancel{a}$b + b + $\cancel{b}$d + a$\cancel{c}$ + $\cancel{b}$c + c d

= a + b + c d (suppression des <u>multiples</u> de a et b)

Remarque: pour éviter d'écrire des termes à supprimer ensuite, il faire la remarque suivante : posons X= a + b ; l'expression à développer s'écrit (X + c) (X + d) et d'après (22) ceci s'écrit

X + c d = a + b + c d (distributivité de OU pour ET) on évite ainsi des écritures inutiles.

Exemple: *développer* ***f(a,b,c)= (a + b + c) (c + d + e) (a + c + d) (c + e + f)***

on réorganise en ***((a + c) + b) ((a + c) + d) ((c + e) + d) ((c + e) + f)***

= (a + c + b d) (c + e + d f)

= c + (a + b d) (e + d f)

= c + a e +a d f + b d e + b d f

ce qui donne un calcul plus rapide que d'écrire les ***81 monômes*** *obtenus en développement bêtement !*

1.3.3. relations avec le complément

(23) $a + \bar{a} = 1$ (évident)

Application : simplification de certaines expressions, exemple: $a\bar{x} + a x = a(\bar{x} + x) = a$

(24) complément d'une somme : $\boxed{\overline{a+b} = \bar{a} \cdot \bar{b}}$

en effet on peut distinguer deux cas :

cas a=0 alors $\overline{a+b} = \overline{0+b} = \bar{b}$ et $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{0} \cdot \bar{b} = 1 \cdot \bar{b} = \bar{b}$

cas a=1 alors $\overline{a+b} = \overline{1+b} = \bar{1} = 0$ et $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{1} \cdot \bar{b} = 0 \cdot \bar{b} = 0$

(25) complément d'un produit : $\boxed{\overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}}$ (par dualité)

(26) **complément d'une expression en somme de produits:**

soit $f = \Sigma m_i$ son complément est donc d'après (24) $\bar{f} = \Pi \overline{m_i}$

pour chaque $m_i = \Pi x_j$ on calcule son complément par (25) $f = \Pi(\Sigma \bar{x}_j)$

en fait, on remplace tous les + par des . et vice versa, et toutes les lettres par des lettres complémentées et vice versa.

exemple:

$f= a\,\overline{b} + b\,\overline{c} + c\,\overline{a}$ $\qquad\qquad$ $\overline{f} = (\overline{a} + b)(\overline{b} + c)(\overline{c} + a)$

On peut éventuellement développer cette expression et on obtient:

$\overline{f} = \overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c} + a\,b\,c$

(27) $a + \overline{a}\,b = (a + \overline{a}).(a+b)$ par distributivité de + pour x
$= 1.(a+b)= a+b$

1.3.4. Forme canonique :

Toute fonction f(x) peut se mettre sous la forme dite canonique (unique):

(28) $\boxed{f(x) = x\,f(1) + \overline{x}\,f(0)}$

(démonstration évidente en distinguant les cas x=1 et x=0)

On peut appliquer ceci pour une fonction de deux variables :

$f(x,y) = x\,f(1,y) + \overline{x}\,f(0,y)$ $\qquad$ d'après (28)

$= x.(y.f(1,1) + \overline{y}\ f(1,0)) + \overline{x}.(y\ f(0,\ ) + \overline{y}\ f(0,0))$
toujours d'après (28) . on a donc :

(29) $f(x,y) = x\,y\,f(11) + x\,\overline{y}\,f(10) + \overline{x}\,y\,f(01) + \overline{x}\ \overline{y}\,f(00)$

(on notera la correspondance entre l'apparition de la variable accentuée et celle du 0 dans la fonction). Ceci se généralise à un nombre quelconque de variables :

(30) $f(w,x,y,z...) = w\,x\,y\,z\,f(1,1,1,1...) + w\,x\,y\,\overline{z}\,f(1,1,1,0...) + \ldots +$

$\overline{w}\ \overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z}\,f(0,0,0,0...)$

La forme canonique d'une fonction de n variables comporte donc 2^n termes appelés monômes canoniques. Cette forme est en général très loin d'être minimale, mais elle a l'avantage d'être unique (à l'ordre près des monômes)

Application : détermination de l'expression algébrique d'une fonction donnée par points.
exemple : soit la fonction f(x,y) définie par :

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

cette fonction s'écrit d'après (27): $f(x,y)= x\,y\,0 + x\,\bar{y}\,1 + \bar{x}\,y\,1 + \bar{x}\,\bar{y}\,0 = x\,\bar{y} + \bar{x}\,y$

On en déduit au passage que **toute fonction est un polynôme,** et également qu'avec les opérations ET, OU, COMPLEMENT **on peut exprimer toute fonction**..

1.3.4.2. Nota: l'expression polynomiale d'une fonction n'est pas toujours unique comme le montre l'exemple de la fonction OU : f(00)=0, f(11)=f(10)=f(01)=1 donc x+y peut également s'écrire: $x+y= x\,y + x\,\bar{y} + \bar{x}\,y$

On voit donc que la forme canonique ne donne pas forcément l'expression minimale de la fonction. D'une manière générale une fonction a plusieurs écritures possibles sous forme polynomiale ; il s'ensuit une réelle difficulté à décider si deux fonctions sont égales ou non ;

Exemple la fonction $x + \bar{x}\,y$ est elle égale ou non à $y + x\,\bar{y}$? Par contre sous forme canonique l'égalité est évidente

Le chapitre suivant sera consacré à la minimisation des expressions.

1.3.4.3. Passage d'une somme de produits quelconque à la forme canonique

lemme : toute expression composée de monômes canoniques (à n variables) est une forme canonique (trivial)

Il suffit donc de transformer chaque monôme de la somme en monôme canonique.

méthode : remplacer dans chaque monôme une lettre absente par la somme d'elle même et de son complément, puis développer en éliminant les redondances éventuelles.

Exemple 1:

$$f(x,y,z)= x\,y + y\,\bar{z} = x\,y\,(z + \bar{z}) + y\,\bar{z}\,(x + \bar{x}) \text{ puisque } (z + \bar{z}) = (x + \bar{x}) = 1$$
$$= x\,y\,z + x\,y\,\bar{z} + x\,y\,\bar{z} + \bar{x}\,y\,\bar{z}$$

Exemple 2 :

$f(x,y,z)= x + y z = x (y + \bar{y}) (z + \bar{z}) + (x + \bar{x}) y z$ développé en :

$= x y z + x \bar{y} z + x y \bar{z} + x \bar{y} \bar{z} + x y z + \bar{x} y z$ on élimine les redondances :

$= x y z + x \bar{y} z + x y \bar{z} + x \bar{y} \bar{z} + \bar{x} y z$ forme canonique finale

1.3.5. forme canonique en produit de somme

Par dualité avec le théorème du § 1.3.4. on montre que toute fonction f(x) peut s'écrire

$$F(x)=(x+f(1))(\bar{x}+f(0))$$

Que toute fonction de deux variables peut s'écrire:

$F(x,y)=(x+y+f(0,0))(x+\bar{y}+ f(0,1))(\bar{x}+y+f(1,0))(\bar{x} + \bar{y}+f(1,1))$

Etc…

Comme précédemment, cela implique que toute fonction peut se mettre sous la forme d'un produit de somme de lettres directes ou accentuées (on parle de "monal", abréviation de "monôme dual" et de "polynal", abréviation de "polynôme dual")

Exemple, la fonction xy peut également s'écrire sous forme canonique duale:

$$(x+y)(x+\bar{y})(\bar{x}+y)$$

1.4. RESUME

On a vu que les fonctions ET et OU confèrent à l'ensemble des fonctions booléennes la structure de treillis distributif (structure comportant un maximum et un minimum pour tout couple de fonctions) . L'existence du complément lui confère la structure de treillis distributif et complémenté ou **treillis de Boole**. Cette structure a des propriétés intéressantes, notamment parce que ses opérations de base sont <u>facilement réalisables en électronique.</u> Mais elle n'a pas la richesse de celle de **<u>l'algèbre</u>** de Boole basée sur les opérations "OU EXCLUSIF" et "ET" que nous verrons ci dessous

1.4. Algèbre de Boole.

Cette structure beaucoup plus intéressante en théorie que la première fait appel à la fonction ET et à la fonction OU_EXCLUSIF :

1.4.1. Fonction OU EXCLUSIF.

X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Considérons la fonction f6 du paragraphe 1.2.2. :Cette fonction est égale à 1 quand x OU y (MAIS PAS LES DEUX) sont égaux à 1 ; on l'appelle donc le OU EXCLUSIF. On peut aussi remarquer qu'elle est égale à 1 quand x et y sont différents on l'appelle alors également la DISJONCTION (son complément la fonction f9 égale à 1 quand x et y sont égaux est appelée la CONJONCTION). On peut enfin remarquer que si on considère les symboles 0 et 1 comme des chiffres arithmétiques, cette fonction est alors la SOMME MODULO 2.

Notation : $z = x \oplus y$

Propriétés.

1.4.1.1. structure de groupe: de par la propriété d'être la somme modulo 2 cette fonction $\oplus$ confère à l'ensemble des grandeurs booléennes la propriété d'être un **groupe commutatif.** C'est une propriété mathématique classique de la somme modulo 2 qui peut cependant se démontrer de façon simple :

(29) commutativité : $x \oplus y = y \oplus x$ (évident en raison de la symétrie du tableau).

(30) 0 élément neutre : $0 \oplus x = x \oplus 0 = x$

(31) inverse : $x \oplus x = 0$ x est son propre inverse (évident)

(32) $x \oplus 1 = \bar{x}$ (évident)

(33) associativité : $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ noté $x \oplus y \oplus z$

distinguons deux cas :

$y=0$: $x \oplus (0 \oplus z) = x \oplus z$ et $(x \oplus 0) \oplus z = x \oplus z$ (d'après (30))

$y=1$: $x \oplus (1 \oplus z) = x \oplus \bar{z}$ et $(x \oplus 1) \oplus z = \bar{x} \oplus z = x \oplus \bar{z}$

or si $\bar{x} \neq z$, alors $x \neq \bar{z}$; ces deux dernières expressions sont donc égales

on a bien les propriétés d'un **groupe commutatif .**

Structure de corps.

Le ET est **distributif à gauche et à droite pour le OU exclusif :**

(34) $x.(y \oplus z) = x.y \oplus x.z$ (évident en distinguant les cas x=0 et x=1)

(35) de plus, on peut remarquer que toute grandeur non nulle a un inverse pour le ET (il n'y en n'a qu'une c'est 1 ! et l'inverse de 1 est 1 lui même)

Les grandeurs booléennes forment donc un **corps commutatif.** Concrètement, cela revient à dire que toutes les propriétés classiques du corps des réels se retrouvent .

1.4.1.3 structure d'algèbre.

Sur l'ensemble des **fonctions** booléennes on peut donc définir deux opérations internes :

le **ou exclusif** (associative, commutative qui a un neutre 0 et un inverse)
le **et** (associatif, commutatif, distributif pour le ou exclusif, qui a un élément neutre 1 , mais pas d'inverse),

Les fonctions booléennes forment donc un **anneau commutatif.**

De plus on définit un **produit extérieur** par un scalaire pris sur le corps {0,1} des booléens, ce qui donne à l'ensemble des fonctions la structure d'**algèbre.**

Cela signifie que toutes les propriétés classiques sur l'algèbre des réels se retrouvent dans l'algèbre de Boole, en particulier la pratique courante des calculs.

1.4.2. expression des fonctions.

Théorème toute fonction f(x) peut se mettre sous la forme :

(36) $\boxed{f(x) = (f(0) \oplus f(1))\, x \oplus f(0)} = A.x \oplus B$ (où A est indépendant de x)

en effet pour x=0 on a : $(f(0) \oplus f(1)).0 \oplus f(0) = f(0)$
et pour x=1: $(f(0) \oplus f(1)).1 \oplus f(0) = f(1)$

(37) **Théorème:** toute fonction est **linéaire par rapport à chacune des variables.**

Nota : expression tout à fait comparable à celle de l'algèbre classique : on peut considérer que
$A= f(0) \oplus f(1)$ est la «dérivée booléenne» de la fonction (on pourrait abusivement écrire :

$$\boxed{A = \frac{f(0) \oplus f(1)}{0 \oplus 1}}$$

puisque $0 \oplus 1 = 1$ (le seul élément inversible pour le ET.)

(38) ***On a donc*** $\boxed{f(x)= x.\,f'_x \oplus f(0)}$

Le lecteur pourra vérifier lui même que cette " dérivée booléenne" a les mêmes propriétés que la dérivée usuelle (sauf évidemment celles faisant intervenir à la continuité)

Cas de plusieurs variables:

en appliquant ce théorème à une fonction de deux ou plusieurs variables on obtient des formes telle que :

(38) $\boxed{f(x,y) = A\, x.y \oplus Bx \oplus Cy \oplus D}$

et de même pour 3 variables:

$f(x,y,z)= Axyz \oplus Bxy \oplus Cxz \oplus Dyz \oplus Ex \oplus Fy \oplus Gz \oplus H$

etc...

Théorème: avec les seules opérations ET et OU_EXCLUSIF **on peut réaliser toute fonction;** ou encore**, TOUTE FONCTION EST UN POLYNOME**

NOTA *La structure d'algèbre est beaucoup plus riche que celle de treillis, et il semblerait que la meilleur façon d'exprimer les fonctions booléennes soit plutôt avec ET et OU_EXCLUSIF qu'avec ET, OU, COMPLEMENT. Malheureusement le OU-EXCLUSIF n'est pas une fonction élémentaire en électronique, contrairement aux autres ;la structure de treillis est en fait la plus utilisée.*

Relations diverse avec ET et OU

(38) $\boxed{x \oplus y = x\,\overline{y} + \overline{x}\,y}$ (cf § 1.3.4.)

(39) $\boxed{x + y = x \oplus y \oplus xy}$

(40) Nota : si deux fonctions f et g sont **disjointes** (leur produit f.g est identiquement nul) alors **$f \oplus g = f + g$**

En effet, $f \oplus g$ et $f + g$ ne diffèrent que par leur valeur quand f et g valent 1 simultanément, ce qui est impossible puisque $f.g \equiv 0$.

Corollaire, à la forme canonique en ET et OU correspond une forme similaire en ET et OU_exclusif ; par exemple pour 2 variables :

$$f(x,y) = x\,y\,f(11) + x\,\overline{y}\,f(10) + \overline{x}\,y\,f(01) + \overline{x}\,\overline{y}\,f(00)$$

$$= x\,y\,f(11) \oplus x\,\overline{y}\,f(10) \oplus \overline{x}\,y\,f(01) \oplus \overline{x}\,\overline{y}\,f(00)$$

puisque tous les monômes canoniques sont disjoints 2 à 2

Ceci donne un moyen de passer de la forme ET/OU à la forme ET/OU_EXCLUSIF :

a) à partir d'une forme quelconque et ET/OU, mettre sous forme canonique ;
b) convertir tous les + en $\oplus$
c) remplacer toutes les lettres accentuées par exemple $\bar{x}$ en $(x \oplus 1)$
d) développer

Exemple

$$
\begin{aligned}
a + b &= a\,b + a\,\bar{b} + \bar{a}\,b \qquad \text{(forme canonique)}\\
&= a\,b \oplus a\,\bar{b} \oplus \bar{a}\,b\\
&= a\,b \oplus a\,(b \oplus 1) \oplus (a \oplus 1)\,b\\
&= ab \oplus ab \oplus a \oplus ab \oplus b\\
&= a \oplus b \oplus ab
\end{aligned}
$$

Inversement : partant d'une forme ET/OU_EXCLUSIF , on procède comme au § 1.3.4.3. pour obtenir une forme canonique : exemple :

$f(a,b) = a \oplus b \oplus ab$ dans chaque monôme chaque lettre <u>absente</u> est remplacée :

$= a\,\mathbf{(b \oplus \bar{b})} \oplus \mathbf{(a \oplus \bar{a})}\,b \oplus ab$ on développe :

$= ab \oplus a\,\bar{b} \oplus ab \oplus \bar{a}\,b \oplus ab$ on simplifie :

$= ab \oplus a\,\bar{b} \oplus \bar{a}\,b$ on remplace $\oplus$ par + :

$= ab + a\,\bar{b} + \bar{a}b$ =forme canonique ET/OU.

Eventuellement il ne reste plus qu'à minimiser l'expression trouvée

1.4.3. équations linéaires

L'existence de l'inverse permet de faire sensiblement les mêmes calculs qu'en algèbre normale :

exemple , résoudre $a \oplus x = b$: on peut ajouter a aux deux membres de l'équation :

$a \oplus (a \oplus x) = a \oplus b$ ou encore :

$(a \oplus a) \oplus x = a \oplus b$ ou enfin:

$x = a \oplus b$

On constate donc qu'on peut faire passer un terme de gauche à droite du signe = ou inversement. Comme en algèbre classique (mais sans changement de signe!)

Nota: on pourrait traiter de même des systèmes d'équations linéaires, et appliquer les méthodes classiques de l'algèbre sur R

Cela peut conduire à traiter par exemple des matrices booléennes avec toutes les propriétés des matrices normales (propriété très utilisé dans la théorie du codage)

1.5.1. autres fonctions

Les autres fonctions de 2 variables n'ont pas de propriétés marquantes au point de vue mathématiques. On note cependant :

1.5.1. fonction NOR (fonction f8 du § 1.2.2.)

La fonction f7 est égale à 1 quand **ni** x **ni** y ne valent 1. On l'appelle la fonction NI en français, NOR en anglais elle s'écrit

$\bar{x}\,\bar{y} = NOR(x,y)$

elle est commutative (puisque le ET l'est)
elle n'est pas associative, n'a pas de neutre, n'est distributive par rapport à rien, en bref, elle n'a pas grand intérêt algébriquement parlant.

Néanmoins elle a deux propriétés fondamentales :

1.5.1.1. elle permet à elle seule de **réaliser n'importe quelle fonction**, puisqu'elle permet de réaliser :

le complément : $NOR(x,x)= \bar{x}$,

le ET: $NOR(\bar{x}, \bar{y})= x.y$,

le OU : $\overline{NOR(x,y)} = x + y$

comme ces trois opérateurs permettent de tout exprimer, il en va de même pour le NOR

1.5.1.2. c'est une des fonctions facilement réalisable en électronique
allié à la précédente, cette propriété fait du NOR une fonction des plus précieuse !

1.5.2. fonction NAND (fonction f14 du § 1.2.2.)

La fonction f14 est égale à 1 quand x ou y valent 0 (c'est le complément du ET). On l'appelle la fonction NAND en anglais , contraction de NOT-AND elle s'écrit :

$\overline{x.y} = \bar{x} + \bar{y} = NAND(x,y)$

Ses propriétés sont analogues au NOR :elle est commutative (puisque le OU l'est), elle n'est pas associative, n'a pas de neutre, n'est distributive par rapport à rien. Néanmoins comme la précédente, elle a deux propriétés fondamentales :

1.5.2.1. elle permet à elle seule de **réaliser n'importe quelle fonction**, puisqu'elle permet de réaliser :

le complément : NAND(x,x)= $\bar{x}$,

le OU: NAND($\bar{x}$, $\bar{y}$)= x + y , le ET : $\overline{\text{NAND}(x,y)}$ = x y

comme ces trois opérateurs permettent de tout exprimer, il en va de même pour le NAND

1.5.2.2. C'est l'autre fonction facilement réalisable en électronique**. En fait la plus utilisée**.

On trouvera dans les ouvrages sur les circuits logiques comment l'utiliser.

1.5.3.fonction implication (fonction f13 du § 1.2.2.)

Cette fonction notée $x \rightarrow y$ est très importante en logique : en revenant à la correspondance 0= faux et 1= vrai, elle signifie quand elle est vraie : « **soit x est faux soit y est vrai** » donc **x implique y.**

Nota:

X implique y signifie qu'il est impossible d'avoir x et non y; donc :

x→y ="jamais x et pas y" = $\overline{x.\bar{y}} = \bar{x} + y$

Une propriété importante: la transitivité:

A→B et B→C entraine A→C
Deux démonstrations:

a) $(\bar{A}+B)(\bar{B}+C)=(\bar{A}+B)(\bar{B}+C)(\bar{A}+C)$ (il suffit de développer les deux côtés)

b) ((A→B).(B→C)) → (A→C) = "vrai" ou encore par définition de l'implication:

$\overline{(\bar{A}+B)(\bar{B}+C)} + (\bar{A}+C)=1$

$A.\bar{B}+B.\bar{C}+\bar{A}+C=1$ ce qui est trivial

Signification: dire que A implique B et B implique C est suffisant, inutile de dire que A implique C

Application: modélisation des connaissances;

a) Tout théorème s'exprime en terme d'implications
Exemple:

Théoreme 1 (ABC est un triangle).(angle A= angle B) $\rightarrow$ (coté BC=côté AC)

Théorème 2 (coté BC=côté AC) $\rightarrow$ (C est sur la médiatrice de AB)

de la forme $X.Y \rightarrow Z$ et $Z \rightarrow W$ ou encore $(\overline{X}+\overline{Y}+Z)(\overline{Z}+W)= (\overline{X}+\overline{Y}+Z)(\overline{Z}+W)(\overline{X}+\overline{Y}+W)$
inutile de d'énoncer le théorème 3 déduit des deux autres.

b) ceci ne s'applique pas qu'aux mathématiques, mais par exemple aux bases de données:
exemple: données relatives à une agence immobiliaire: on a des "définitions fonctionnelles"

- vendeur(logement): quand on connaît un logement L, on connaît son vendeur V;
- prix(vendeur, acheteur): si on connaît le vendeur V et l'acheteur A , on connaît le prix P.
- prix(logement, acheteur): si on connaît le logement L et l'acheteur A , on connaît le prix P.
-

Ceci s'exprime par: $(L \rightarrow V) . (V.A \rightarrow P). (L.A \rightarrow P)$

Mais cette description peut se simplifier:en remarquant que:

$$(L \rightarrow V) . (V.A \rightarrow P). (L.A \rightarrow P) = (L \rightarrow V) . (V.A \rightarrow P)$$

le dernier "facteur" du premier membre n'ajoute rien, inutile de créer un tableau [logement, acheteur, prix]

Application: ensembles:

L'inclusion des ensembles peut s'exprimer par l'implication:

$$\boxed{A \subseteq B \ = \ x \in A \ \rightarrow x \in \ B}$$

1.5.4. Fonction conjonction (fonction f9)

C’est le complément du "ou exclusif " ou "disjonction" on la note $x \otimes y$.
C'est également la fonction égalité notée =

Elle a les **propriétés duales du ou-exclusif.**
Associativité, commutativité, 1 est élément neutre, tout élément est son propre inverse, distributivité du + pour $\otimes$, etc…

En particulier avec le_OU (dual du ET), elle donne également aux fonctions la structure d’algèbre.
C’est par pure habitude qu’on ne l’utilise pas et qu’on lui préfère le OU_EXCLUSIF.

Application: certaines expressions logiques peuvent se simplifier:

Exemple 1 si $(a < b)$= VRAI alors…. Se simplifie en si $a<b$ alors… puisque 1 étant élément neutre, $x \otimes 1 = x$

Exemple 2
Si $(a<b)$ et ($c<d$) ou $(a\geq b)$et$(c\geq d)$ alors… s'écrit plus simplement:
Si $(a<b)=(c<d)$ alors….

Expressions canoniques: $a \otimes b = a \, . \, b + \overline{a} \, . \, \overline{b} = (\overline{a} + b) \, . \, (a + \overline{b})$

La deuxième expression montre que $a \otimes b = (a \rightarrow b) \, . \, (b \rightarrow a)$

Exemple d'application: exprimer que 3 grandeurs sont égales

$a=b=c \quad = \quad (a\rightarrow b) \, . \, (b\rightarrow a). \, (b\rightarrow c) \, . \, (c\rightarrow b). \, (a\rightarrow c) \, . \, (c\rightarrow a)$

mais la transitivité de $\rightarrow$ implique que

$(a\rightarrow b). \, (b\rightarrow c) \rightarrow (a\rightarrow c)$ donc le terme $(a\rightarrow c)$ est inutile car compris dans les deux autres. De même $b\rightarrow a$ et $c\rightarrow b$ sont inutiles; donc:

$$\boxed{a=b=c \quad = \quad (a\rightarrow b) \, . \, (b\rightarrow c) \, . \, (c\rightarrow a)}$$

CHAPITRE 2
MINIMISATION DES EXPRESSIONS.

2.1. introduction

On a vu au chapitre 1 que les formes polynomiales d'une même fonctions peuvent avoir des complexités très variées. Exemple:

$$x\,y + \overline{x}\,y + x\,\overline{y} \quad = \quad x + \overline{x}\,y \quad = \quad x + y$$

Or la complexité de l'expression est liée directement au coût de réalisation, et il s'agit, sinon de trouver la forme minimale, au moins de trouver une forme relativement optimale. Les méthodes se répartissent en trois grandes classes:

méthodes empiriques (algébriques)
méthodes graphiques,
méthodes rigoureuses.

exemple: simplifier $x\,y + x\,\overline{y} + \overline{x}\,y$

$= x\,y + x\,y + x\,\overline{y} + \overline{x}\,y$ d'après l'idempotence

$= x\,(y + \overline{y}) + y\,(x + \overline{x})$ (commutativité, distributivité)
$= x + y$

Définitions:

A chaque monôme canonique est associé la valeur des variable pour lequel ce monôme vaut 1, c'est à dire un **point** dans l'espace $\{0,1\}^n$. la valeur 1 du monôme "caractérise le point"

Deux monômes fusionnables (ne différant que par la complémentation d'une lettre sont dits "voisins" .
exemple $w\,x\,y\,z$ et $w\,\overline{x}\,y\,z$ sont fusionnables en un seul: $w\,y\,z$ moins "cher"

La fusion de deux monômes canoniques donne un monôme représentant **deux points** avec une lettre de moins. La fusion de deux tels monômes donne un monôme représentant 4 points (on dit "couvrant" 4 points), etc.... d'une manière générale un monôme de k lettres dans un espace de dimension n couvre 2^{n-k} points. On notera donc que **<u>plus la "surface" couverte par un monôme est grande, moins ce monôme a de lettres.</u>**

Monômes maximaux: un monôme est dit "maximal" s'il ne peut être fusionné avec aucun autre, **c'est à dire s'il n'existe pas de monôme plus grand (ayant moins de lettres) et inférieur à la fonction.** Un tel monôme est également dit "premier" (il n'existe pas de diviseur de ce monôme inférieur à la fonction)

Exemple $f = x\,y\,z + x\,\bar{y}\,z + x\,y\,\bar{z} + \bar{x}\,y\,z$
le monôme $x\,y\,z$ n'est pas maximal puisqu'il existe un monôme $x\,y$ plus grand que lui et inférieur à f. Par contre xy est maximal (les seuls monômes plus grands, x et y, ne sont pas inférieurs à f)

Un monôme m est dit "compatible" avec la fonction f si $f \geq m$ c'est à dire si $f + m = f$

Optimiser une fonction revient à la représenter sous forme de somme de <u>monômes maximaux compatibles</u> avec la fonction; par exemple l'expression minimale de la fonction ci dessus est f=xy+yz+zx

forme minimale: Certaines fonctions ont des écritures sous formes de somme de monômes maximaux mais qui ne sont pas minimales;

exemple $f = x\,\bar{y} + y\,z + x\,z$ n'est formée que de monômes maximaux mais n'est pas minimale. La forme minimale étant:

$$f = y\,z + x\,\bar{y}$$

en effet la forme canonique est:

$$f = x\,y\,z + \bar{x}\,y\,z + x\,\bar{y}\,z + x\,\bar{y}\,\bar{z}$$

une façon adroite est de regrouper les deux premiers et les deux derniers monômes:

$$f = y\,z\,(x + \bar{x}) + x\,\bar{y}\,(z + \bar{z}) = y\,z + x\,\bar{y}$$

mais on pouvait écrire (maladroitement!) en dédoublant les monômes 1 et 3:

$$f = x\,y\,z + \bar{x}\,y\,z + x\,\bar{y}\,z + x\,\bar{y}\,\bar{z} + x\,y\,z + x\,\bar{y}\,z$$

$$f = y\,z\,(x + \bar{x}) + x\,\bar{y}\,(z + \bar{z}) + x\,z\,(y + \bar{y}) = y\,z + x\,\bar{y} + x\,z$$

on dit que le monôme xz est "inutile" ou "redondant".

De manière plus générale si A et B sont des fonctions quelconques, on a l'égalité

$\boxed{A\,x + B\,\bar{x} = A\,x + B\,\bar{x} + A\,B}$ où **AB est donc redondant**
(propriété qui se démontre en distinguant les deux cas x=0 et x=1)

En définitive, minimiser une fonction revient à la représenter avec un <u>nombre minimal de monômes maximaux.</u>

Ceci montre que ces méthodes ne sont pas toujours très faciles à manipuler s'il y a beaucoup de monômes; de plus elles nécessitent l'écriture initiale de la fonction sous une forme canonique lourde.

NOTA: Une comparaison (osée) de la notion de couverture: couvrir le toit d'une maison veut dire le couvrir <u>complètement</u> (et <u>pas plus</u>, pas question de couvrir le toit des voisins), avec un nombre minimum de tôles de taille maximum. On peut couvrir de façon redondante ou non: inutile de placer une tôle "à cheval" sur deux autres!

2.2.1. méthode "empirique": elle consiste à appliquer manuellement les règles ci dessus; mais la méthodes est lourde pour deux raisons:

a) partant du tableau de valeurs de la fonction, on écrit tous les monômes canoniques, et il peut y en avoir beaucoup!
b) la fusion des monômes n'est pas évidente à voir.

2.2.2. méthode graphique: diagramme de Karnaugh.

L'idée est de partir du tableau (dit "tableau de vérité") donnant les valeurs de la fonction pour toutes les combinaisons des variables. Mais ce tableau est **réorganisé** de façon à mettre en évidence les points correspondant aux monômes fusionnables: Considérons par exemple une fonction de 4 variables f(a,b,c,d). A chaque case du tableau correspond un point donc un monôme canonique .

C,D \ A,B	00	01	11	10
00	$\bar a\,\bar b\,\bar c\,\bar d$	$\bar a\,b\,\bar c\,\bar d$	$a\,b\,\bar c\,\bar d$	$a\,\bar b\,\bar c\,\bar d$
01	$\bar a\,\bar b\,\bar c\,d$	$\bar a\,b\,\bar c\,d$	$a\,b\,\bar c\,d$	$a\,\bar b\,\bar c\,d$
11	$\bar a\,\bar b\,c\,d$	$\bar a\,b\,c\,d$	$a\,b\,c\,d$	$a\,\bar b\,c\,d$
10	$\bar a\,\bar b\,c\,\bar d$	$\bar a\,b\,c\,\bar d$	$a\,b\,c\,\bar d$	$a\,\bar b\,c\,\bar d$

$\bar a\ \bar b\ \bar c$

a.c

Le voisinage algébrique des monômes $\bar a\ \bar b\ \bar c\ d$ et $\bar a\ \bar b\ \bar c\ \bar d$ correspond au voisinage géographique.

Donc le monôme fusionné $\bar a\ \bar b\ \bar c$ se matérialise par le rectangle en pointillé (jaune)
de même le monôme $a\,b\,c\,d + a\,\bar b\,c\,d + a\,b\,c\,\bar d + a\,\bar b\,c\,\bar d = a\ c\ d + a\ c\ \bar d$ =ac cette fusion est représentée par le grand rectangle (bleu).

On remarque que ces groupements peuvent se faire directement sur le tableau des valeurs de la fonction, <u>sans écrire les monômes canoniques</u>:

C,D \ A,B	00	01	11	10
00	1			
01	1			
11			1	1
10			1	1

NOTA: a) inversement connaissant la "forme" du monôme on peut trouver son expression; par exemple le "grand" monôme ci dessus est d'une part indépendant des valeurs de b et de d, et égal à 1 quand a et c valent 1 c'est donc le monôme **ac.**

b) l'adjacence des cases doit se voir comme si le diagramme était <u>dessiné sur une sphère</u>: les cases à l'extrême gauche sont adjacentes à l'extrême droite, et l'extrême haut à l'extrême bas. Exemple

C,D \ A,B	*00*	*01*	*11*	*10*
00		1		
01				
11	1			1
10	1	1		1

$\mathbf{\bar{a}\, b\, \bar{d}}$

$\mathbf{\bar{b}c}$

$$f = \bar{a}\, b\, \bar{d} \;+\; \bar{b}\, c$$

Dans certains cas le choix des monômes peut être compliqué; exemple:

C,D \ A,B	00	01	11	10
00		1		
01		1	1	
11			1	1
10			1	1

des deux monômes pointillés, un seul est nécessaire. Donc la fonction a deux expressions possibles.

Méthodes algébriques

La méthode ci-dessus devient inextricable dès que le nombre de variables dépasse 4. On doit avoir alors recours à des méthodes plus formalisées et de ce fait programmables

2.2.3.1. Méthode par consensus

Cette méthode est destinée à donner la liste de **tous** les monômes maximaux (bien que tous ne soient pas forcément utiles).

Lemme:

$$A x + B \bar{x} = A x + B \bar{x} + A B$$

Ceci se démontre facilement en considérant les deux cas x=0 (B=B+AB) et x=1 (A=A+AB)
Par définition, le monôme AB est le "consensus" des deux premiers.

Théorème
en rajoutant à une forme quelconque **tous les consensus** déterminés de toutes les manières possibles, et en **éliminant les multiples éventuels**, on obtient **tous** les monômes maximaux.

La démonstration en est complexe et sans grand intérêt; mais un exemple permet de fixer les idées:

exemple 1

$$f = a + \bar{a} b + \bar{a} \bar{b} c$$

le consensus des deux premiers est b qui élimine le deuxième monôme qui en est multiple:

$$f = a + \cancel{\bar{a} b} + \bar{a} \bar{b} c + \mathbf{b}$$

Dans cette nouvelle forme, le consensus de a et de $\bar{a} \bar{b} c$ donne $\bar{b}.c$ qui élimine $\bar{a} \bar{b} c$

donc $f=a+b+ \cancel{\bar{a} \bar{b} c} + \mathbf{\bar{b} c}$

le consensus de b et de $\bar{b} c$ donne c qui élimine $b \bar{c}$; donc la fonction s'écrit $f = a + b + c$
il n'y a plus de consensus possible, la fonction est irréductible.

Exemple 2:

$$f = a \bar{b} + \bar{a} b + b \bar{c} + \bar{b} c$$

en faisant les consensus de toutes les manières possibles, on obtient
$$f = a \bar{b} + \bar{a} b + b \bar{c} + \bar{b} c + a \bar{c} + \bar{a} c$$

Remarque: Cette méthode est facilement programmable, mais difficile à faire à la main.

Théorème:

toute expression "monotone" (c'est à dire telle que chaque variable n'apparaît que sous forme direte ou que sous forme complémentée) et irredondante (de comportant pas de monomes multiples d'un autre) est irréductible puisqu'il n'y a pas de consensus possible.

Exemple ab+bc+ca est certainement sous forme minimale.

Exemple d'application: preuve de théorème

Soit à montrer la transitivité de l'implication, c'est à dire que :

((a➔b) **et** (b➔c)) ➔(a➔c) est une propriété toujours vraie
rappelons nous que l'implication x➔y s'écrit également $\overline{x}$+y. il suffit donc de montrer que

$$\boxed{\overline{(\overline{a}+b).(\overline{b}+c)} + (\overline{a}+c) = 1}$$

ou encore:

$a\,\overline{b} + b\,\overline{c} + \overline{a} + c = 1$ le consensus des monômes 1 et 3 donne $\mathbf{\overline{b}}$, celui de 2 et 4 donne **b**, dont la somme est 1. CQFD

2.2.3.2. Méthode par complémentation

théoreme

si f1 et f2 sont des fonctions toutes les deux sous forme **de somme de tous leurs monômes maximaux** leur produit donne par développement (et élimination des multiples) une **somme de <u>tous</u> les monômes maximaux**

Démonstration: *(nota dans ce qui suit le complément de x est noté x')*

Soit à effectuer le produit F= f1.f2, f1 et f2 étant chacune sous forme de <u>somme de tous leurs monômes premiers.</u> En développant on obtient une somme de monômes, et la question est de savoir si par consensus, on peut obtenir des monômes nouveaux. Intéressons nous à la possibilité de faire des consensus par rapport à une variable quelconque x.

Lemme: toute fonction f(x) peut se mettre sous la forme f= Ax+Bx'+C

Ax est l'ensemble des monômes contenant x, Bx' l'ensemble des monômes contenant x', C l'ensemble des monômes ne contenant ni x ni x'.

F peut donc se mettre sous la forme :

F=(Ax+Bx'+C)(Dx+Ex'+F) où A, B, . . F sont des sommes de monômes.

D'après les hypothèses C (ensemble des monômes ne contenant ni x ni x') contient tous les consensus possibles entre un monôme de A et un monôme de B; donc A.B ≤ C.

De même D.E ≤ F

En développant, on obtient

F=ADx + AFx + BEx' + BFx' + CDx + CEx' + CF

En effectuant tous les consensus possibles (il y en a 9) entre ces termes, on obtient des monômes tous inclus dans CF, donc inutiles.

corollaire

Si on part du **complément de f** et qu'on calcule f par la formule donnée au chapitre 1 on obtient tous les monômes maximaux.

En effet
La méthode consiste à remplacer les "+" par des "." et les "." par des "+", à changer les variables en leur compléments, et à développer
chaque monôme de $\overline{f}$ donne par complémentation une somme de variables donc formé de tous les monômes maximaux .

exemple: $(abc+a'b'c')' = (a'+b'+c')(a+b+c)$

$$= \cancel{a'a} + a'b + a'c + b'a + \cancel{b'b} + b'c + c'a + c'b + \cancel{c'c}$$

on obtient effectivement tous les monômes premiers.

Autre démonstration

lemme: toute fonction f(x) se met sous la forme:

$$f(x)= (x+A)(\overline{x}+B)\ C$$

théorème dual de $f(x)=Ax + B\overline{x} + C$ (A=monômes contenant x, B=monômes contenant $\overline{x}$, C=monômes ne contenant ni l'un ni l'autre)

Soit alors une fonction f quelconque par exemple obtenue par complémentation de $\overline{f}$

$$f(x)= (x+A)(\overline{x}+B)\ C$$

Si on développe, on obtient:

$$f(x)= A C \overline{x} + B C x + A B C$$

Or ABC est le consensus de $AC\overline{x}$ et de BCx, inutile donc de le calculer. L'opération de développement d'un produit de somme donne tous les consensus, donc tous les monômes premiers.

Exemple , soit la forme canonique :

$$f= \overline{a} b c + a \overline{b} c + a b \overline{c} + \overline{a}\,\overline{b} c + \overline{a} b \overline{c} + a \overline{b}\,\overline{c}$$

Son complément est de toutes évidence $\overline{f} = a b c + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ (les deux monômes canoniques qui manquent) donc $f= (\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}) . (a + b + c)$ en développant on obtient:

$$f= \cancel{\overline{a} a} + \overline{a} b + \overline{a} c + \overline{b} a + \cancel{\overline{b} b} + \overline{b} c + \overline{c} a + \overline{c} b + \cancel{\overline{c} c}$$

Remarque: la méthode revient donc a complémenter deux fois la fonction

La méthode donne les mêmes résultats que les consensus, mais beaucoup plus naturelle, elle est plus facile à la main.

2.2.3.3. Choix optimum des monômes: méthode de "couverture"

Il s'agit avec un minimum de monômes de "couvrir" les points de la fonction. Dans un premier temps, on recense les points (ou monômes canoniques) de la fonction et pour chaque, la liste des monômes qui le couvrent.

Pour comprendre le problème, on peut revenir à la méthode de Karnaugh: il faut "couvrir" toute la "surface de la fonction" par un minimum de monômes de surface la plus grande possible (comme s'il s'agissait de couvrir un toit par des tôles).

Donc chaque élément de la "surface" doit être couvert au moins une fois.

Exemple

$$f = \underset{a}{\bar{x}\,y\,z} + \underset{b}{x\,\bar{y}\,z} + \underset{c}{x\,y\,\bar{z}} + \underset{d}{x\,\bar{y}\,\bar{z}} + \underset{e}{\bar{x}\,y\,\bar{z}} + \underset{f}{\bar{x}\,\bar{y}\,z} \quad \text{(forme initiale)}$$

$$= \underset{A}{x\,\bar{y}} + \underset{B}{\bar{x}\,y} + \underset{C}{y\,\bar{z}} + \underset{D}{\bar{y}\,z} + \underset{E}{x\,\bar{z}} + \underset{F}{\bar{x}\,z} \quad \text{(tous le monômes premiers)}$$

appelons a,b,c,d,e,f les monômes initiaux. A chaque monôme premier, on associe une variable booléenne égale à 1 si le monôme est utilisé, zero sinon. Soient A,B,C,D,E,F ces variables associées. On raisonnera de la façon suivante:

pour couvrir a= $\bar{x}\,y\,z$, il faut prendre B ou F ($\bar{x}y$ ou $\bar{x}z$) donc B+F=1
pour couvrir b= $x\,\bar{y}\,z$, il faut prendre A ou D (x $\bar{y}$ ou $\bar{y}z$) donc A+D=1
etc...
on obtient : (B+F)=1 et (A+D) =1 et (E+C)=1 et (A+E)=1 et (B+C)=1 et (F+D)=1
ou encore : M= (B+F)(A+D) (E+C)(A+E)(B+C)(F+D)=1
développons cette fonction M sous forme de somme de produits:

= (BDE+ABCD+ABEF+ABCF+CDEF+ACDF+ACEF+ACF)

pour que cette fonction soit égale à 1, il suffit qu'un de ses monôme soit égal à 1; par exemple ABCD=1 ou encore prendre A et B et C et D.

On remarque cependant que le problème étant de minimiser l'expression de f, il faut choisir un nombre minimum de monômes premier, ce qui se traduit par le choix d'un monôme de M de plus faible degré: soit BDE, soit ACF.

Notre fonction a donc deux expressions **minimales:**

$\boxed{F= x\,\bar{y} + y\,\bar{z} + z\,\bar{x}}$ et $\boxed{\bar{x}\,y + \bar{y}\,z + \bar{z}\,x}$

Elle a aussi des expressions non minimales (bien que non redondantes) par exemple

$F= x\,\bar{y} + \bar{x}\,y + \bar{x}\,z + y\,\bar{z}$ correspondant au monôme ABCD de M

Remarque: en développant, on trouve **toutes** les combinaisons de monômes donnant une forme non redondante. Mais plutôt que de développer bêtement pour trouver **toutes** les formes, ce qui n'a pas d'intérêt (il suffit d'en trouver une!), on remarque que le degré du polynôme développé étant certainement supérieur à trois, un de ses monômes de plus bas degré est BDE donc **une** solution minimale est

$$f= \bar{x}\, y + \bar{y}\, z + \bar{z}\, x$$

2.2.3.4. NOTA: généralisation à d'autres problèmes d'optimisation

On rencontre fréquemment des problèmes de choix complexes faisant intervenir divers critères.

Exemple*: choisir une équipe de personnes pour répondre à une mission. Par exemple on a besoin d'un informaticien, d'un angliciste, d'un commercial, d'un matheux. 5 personnes se présentent : Jean(J) informaticien et angliciste, Marie (M) informaticienne et commerciale, Paul (P) informaticien matheux et commercial, Colette (C) matheuse et commerciale et angliciste. Tous réclament le même salaire. Quel est le meilleur choix (le max de compétence pour le moindre coût) ?*

a) on associe à chacun une variable booléenne = 1 si on la recrute.

Critère "informaticien": il faut prendre Jean ou Marie ou Paul : $J+M+P=1$
critère "matheux" il faut prendre Paul ou Colette : $P+C=1$
critère "commercial" il faut prendre Paul ou Marie $P+M=1$
critère "anglais" il faut prendre Jean ou Colette $J+C=1$

b) comme il faut répondre aux quatre critères, il faut avoir :

$$J+P+M= P+C=P+M=J+C=1$$

$$\text{ou encore } f=(J+P+M)(P+C)(P+M)(J+C)=1$$

c)pour que cette fonction f soit égale à 1 il suffit qu'un de ses monôme soit égale à 1

développons donc:

$$f=(P+CM)(J+PC+MC)= PJ+PC+PMC+JCM+PCM+CM= PJ+PC+CM$$

donc trois choix optimaux: Pierre et Jean (PJ), Pierre et Colette(PC), Colette et Marie(CM), les autres choix étant redondants (par exemple JMC multiple de MC) .