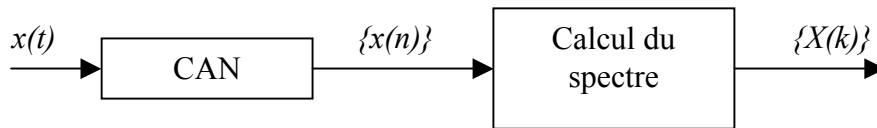


Chapitre 5 : Transformée de Fourier Discrète

La transformation de Fourier discrète est utilisée lorsque l'on désire calculer la transformée de Fourier d'un signal à l'aide d'un ordinateur numérique.



1. Rappel sur la TF d'un signal échantillonné

Un signal échantillonné peut être représenté mathématiquement par une suite infinie d'impulsion de dirac pondérées

$$x_e(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

ce qui s'écrit encore

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e)$$

La transformée de Fourier d'un tel signal s'écrit alors :

$$X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) e^{-j2\pi nT_e f}$$

Ce qui correspond au spectre de $x(t)$ périodisé en fréquence :

$$X_e(f) = X(f) * \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T_e})$$

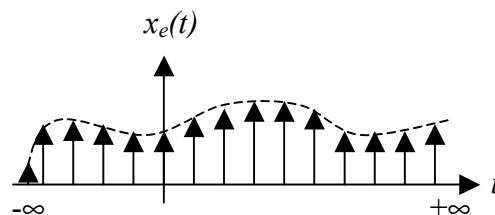


Figure 1: Signal échantillonné

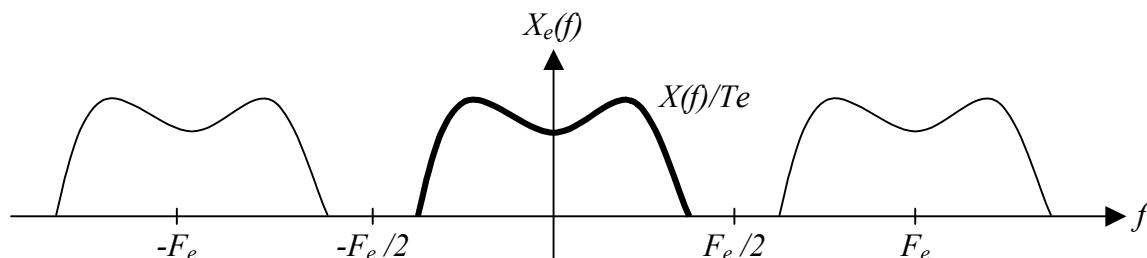


Figure 2 : Spectre du signal échantillonné

Il est à noter que s'il n'y a pas repliement de spectre, le spectre $X(f)$ du signal originel $x(t)$ est retrouvé entre $-F_e/2$ et $F_e/2$ avec un facteur multiplicatif T_e :

$$X(f) = T_e \cdot X_e(f) \cdot \text{rect}\left[\frac{f}{F_e}\right]$$

On rappelle qu'il n'y a pas de repliement si le signal $x(t)$ vérifie la condition de Nyquist (théorème de Shannon).

Le spectre $X(f)$ du signal d'origine doit être à support borné, c'est à dire $X(f) = 0$ pour $f > F_{max}$ et que la fréquence d'échantillonnage doit être choisie tel que :

$$F_{max} < \frac{F_e}{2} \quad \text{Fe/2 est appelée fréquence de Nyquist}$$

Cette condition permet de considérer que l'échantillonnage n'introduit pas de perte d'information. Il est donc possible de reconstruire le signal $x(t)$ à partir de $x_e(t)$ par simple filtrage.

Dans la pratique, le signal d'origine est filtré par un filtre dit anti-repliement afin de vérifier la condition de Nyquist (suppression des fréquences supérieures à $F_e/2$).

Lorsque la condition de Nyquist est respectée, il est alors possible de calculer à partir du spectre les échantillons du signal :

$$x(t) = \int_{-F_e/2}^{F_e/2} X(f) e^{2j\pi ft} df \quad (\text{spectre pris entre } -F_e/2 \text{ et } F_e/2)$$

ce qui donne pour $t = nT_e$

$$x(nT_e) = \int_{-F_e/2}^{F_e/2} X(f) e^{2j\pi fnT_e} df$$

Il est à noter que cette dernière relation est toujours vraie. En d'autres termes, si la condition de Nyquist est respectée, le simple filtrage passe bas énoncé plus haut correspond à une interpolation "directes" des échantillons déterminés par transformée inverse (graphiquement on relie les points entre eux). Si le signal d'origine possédait des variations importantes entre 2 points consécutifs le signal reconstruit ne correspond alors plus au signal d'origine : le recouvrement de spectre correspond à cette perte d'information.

2. Limitation du nombre d'échantillons

Le calcul du spectre nécessite la connaissance du signal $x(t)$ de moins l'infini à plus l'infini. Ainsi le nombre d'échantillon de $x_e(t)$ doit être infini. Dans la pratique on dispose d'un nombre limité d'échantillons

- Limitation du signal échantillonné $x_e(t)$ à N échantillons
- Limitation de la mesure du signal $x(t)$ à une durée $\tau = N T_e$

Le calcul de la transformée de fourier du signal $x_e(t)$ limité à N échantillons devient alors :

$$\tilde{X}_e(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-j2\pi fnT_e}$$

Cela correspond à la transformée de fourier de $x(t)$ échantillonné et tronqué (multiplié par une fenêtre de mesure de durée $N T_e$).

$$\tilde{X}_e(f) = TF(x_e(t) \cdot h(t))$$

avec ici

$$h(t) = \text{rect}\left[\frac{t - \frac{\tau}{2}}{\tau}\right] \quad \text{avec } \tau = N T_e$$

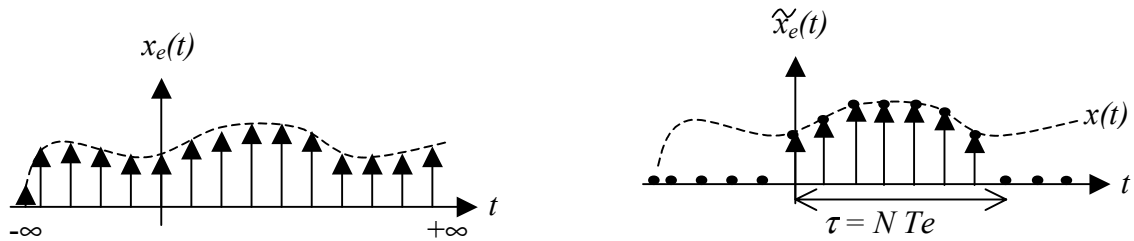


Figure 3 : Effet de la troncature sur le signal $x_e(t)$

Le spectre $X(f)$ du signal $x(t)$ ou bien encore $X_e(f)$, nécessite une connaissance du signal de moins l'infini à plus l'infini. La connaissance que partielle de ce signal pour l'évaluation de son spectre implique :

– une perte d'information si des événements temporels sont à l'extérieur de la fenêtre de mesure
un spectre déformé même si, a priori, toute l'information temporelle est contenue dans l'intervalle de mesure

Ainsi $\tilde{X}_e(f)$ sera une image déformée de $X(f)$.

$$\begin{aligned}\tilde{X}_e(f) &= X_e(f) * H(f) \\ &= \frac{1}{T_e} X(f) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nFe) * H(f)\end{aligned}$$

où :

$$H(f) = N \cdot T_e \operatorname{sinc}(\pi f N T_e) e^{-j2\pi f \frac{N T_e}{2}}$$

$H(f)$ est une fonction qui s'annule tous les $\frac{k}{N T_e}$ ($k \neq 0$). et qui tend vers une impulsion de dirac lorsque la mesure devient très longue, i.e. : $H(f) \xrightarrow{N \uparrow +\infty} \delta(f)$

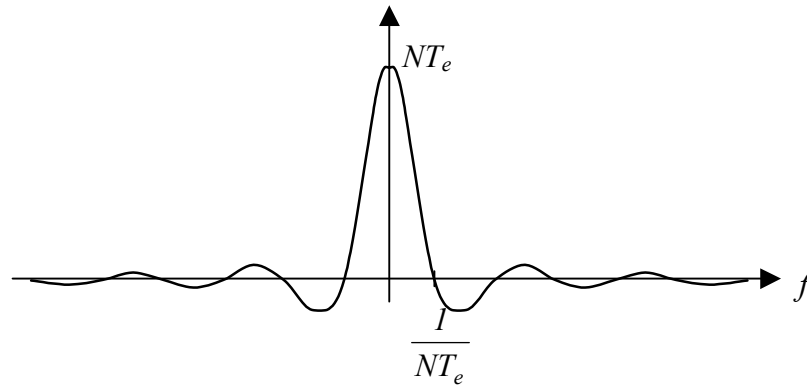


Figure 4 : transformée de Fourier de la fenêtre de mesure

Finalement le spectre estimé $\tilde{X}_e(f)$ s'écrit :

$$\tilde{X}_e(f) = \left(N \cdot X(f) * \operatorname{sinc}(\pi f N T_e) e^{-j2\pi f \frac{N T_e}{2}} \right) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nFe)$$

soit $X(f)$ déformé et dupliqué tous le nFe .

3. Transformée de Fourier discrète

3.1. Discrétisation du spectre

L'expression de $\tilde{X}_e(f)$ fait apparaître la variable f qui est une variable continue. Ainsi $\tilde{X}_e(f)$ est une fonction continue. Pour un calculateur numérique, la manipulation d'une fonction continue est impossible. Pour une manipulation par calculateur il est nécessaire de disposer

- de valeurs discrètes de f
- d'un nombre fini de valeurs

Ainsi un calculateur devra échantillonner le spectre $\tilde{X}_e(f)$ et limiter le nombre d'échantillons. Les étapes sont :

- Discrétisation du spectre $\tilde{X}_e(f)$ au pas Δf
- Limitation du nombre d'échantillon à M

En partant de l'expression de $\tilde{X}_e(f)$:

$$\tilde{X}_e(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-j2\pi f n T_e}$$

après discrétisation au pas Δf on obtient les échantillons du spectre :

$$\tilde{X}_e(k\Delta f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-j2\pi k n T_e \Delta f}$$

On limite généralement le nombre d'échantillons en fréquence à N échantillons uniformément répartis entre 0 et F_e . On rappelle que $\tilde{X}_e(f)$ est périodique de période F_e . Ainsi

$$\Delta f = \frac{F_e}{N} = \frac{1}{NT_e}$$

ce qui nous donne :

$$\tilde{X}_e\left(\frac{k}{NT_e}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

On obtient alors les coefficients de la Transformée de Fourier Discrète noté TFD (DFT in english) correspondant à :

$$\begin{aligned} \{\tilde{X}_e(k)\} &= TFD[\{x(n)\}] \quad \text{avec} \\ \tilde{X}_e(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \end{aligned}$$

3.2. Interprétation

Comme un signal discret implique un spectre périodique, un spectre discret correspond à un signal périodique. Ainsi la discrétisation du spectre $\tilde{X}_e(f)$ au pas Δf implique une périodisation du signal

$\tilde{x}_e(t)$ ($x(t)$ échantillonné et fenêtré) avec une période $\frac{1}{\Delta f} = NT_e$.

Note : on remarque que le pas de discrétisation Δf doit être inférieur ou égal à $\frac{1}{NT_e}$ pour qu'il n'y ait pas de repliement en temps (équivalent en temps du théorème de Shannon).

En notant $\hat{X}_e(f)$ le spectre discrétisé :

$$\hat{X}_e(f) = \tilde{X}_e(f) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k\Delta f)$$

on obtient en temps l'expression d'un signal périodique de période $\frac{1}{\Delta f}$:

$$\hat{x}_e(t) = \tilde{x}_e(t) * \frac{1}{\Delta f} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{k}{\Delta f}\right)$$

Donc pour $\frac{1}{\Delta f} = NT_e$ on retrouve à un coefficient multiplicatif égal à NT_e prêt, le signal échantillonné entre 0 et N-1 dupliqué.

$$\hat{x}_e(nT_e) = NT_e x(nT_e) = NT_e x(n) \text{ pour } 0 < n < N-1$$

4. Transformée de Fourier inverse

En partant de la constatation que : $x(n) = \frac{1}{NT_e} \hat{x}(nT_e)$, et que l'on a la relation

$$\begin{aligned} \hat{x}_e(t) &= TF^{-1}(\hat{X}_e(f)) \\ &= TF^{-1}\left(\tilde{X}_e(f) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k\Delta f)\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{X}_e(k) e^{j2\pi k \Delta f t} \end{aligned}$$

on obtient

$$x(n) = \frac{1}{NT_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{X}_e(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$$

La limitation des échantillons à N correspond à une multiplication en fréquence par une fenêtre de largeur $F_e = 1/T_e$ décalé de $F_e/2$. Cette troncature correspond en temps à une convolution par un *sinc* qui s'annule tous les multiples de T_e :

$$TF^{-1}\left(\text{rect}\left[\frac{f - \frac{1}{2T_e}}{\frac{1}{T_e}}\right]\right) = \frac{1}{T_e} \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T_e}\right) e^{j2\pi \frac{t}{2T_e}}$$

en $t = NT_e$ on obtient alors :

$$\frac{\hat{x}(n)}{T_e} = \frac{1}{NT_e} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}_e(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}}, \text{ soit les coefficients de la TFDI :}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}_e(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$$

4.1. Résumé en image :

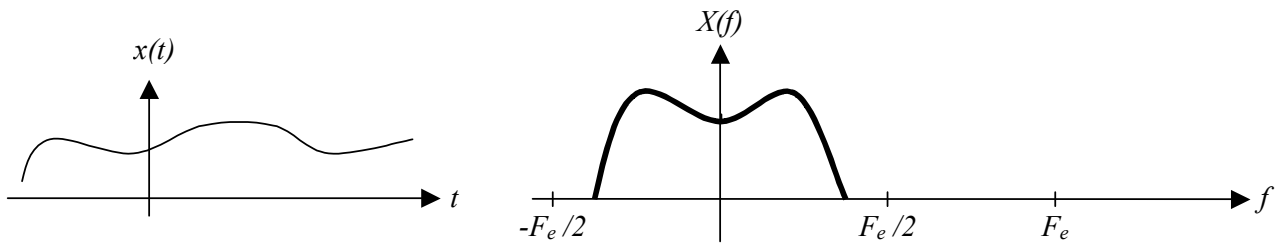


Figure 5 : Signal d'origine (continu et infini)

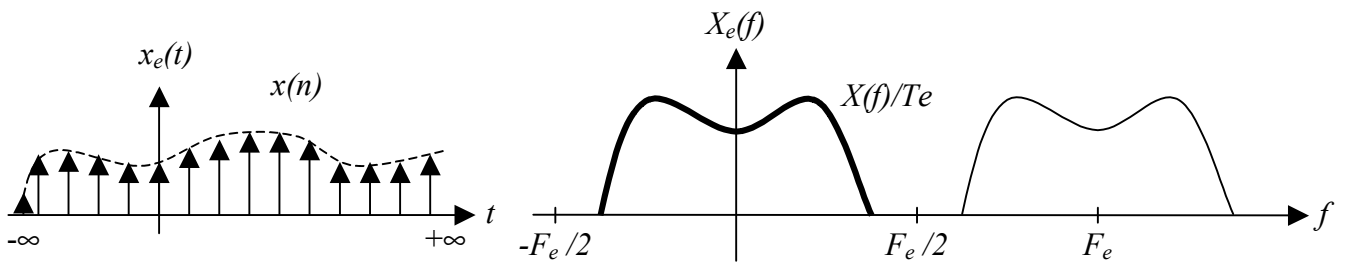


Figure 6 : Echantillonnage

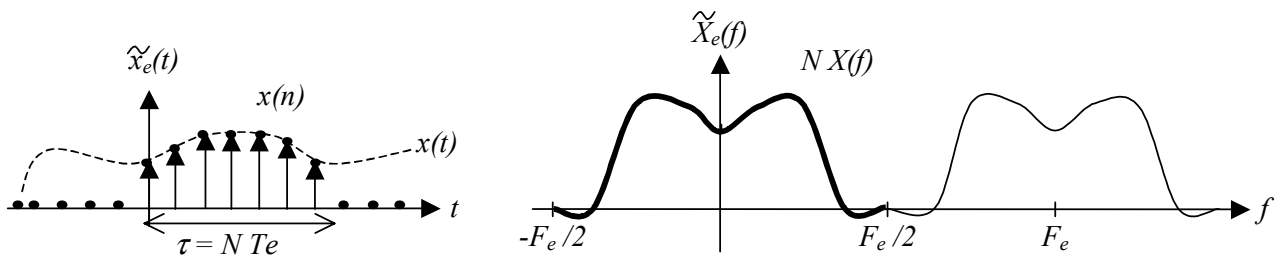


Figure 7 : Effet de la troncature : multiplication par N et déformation du spectre $X(f)$

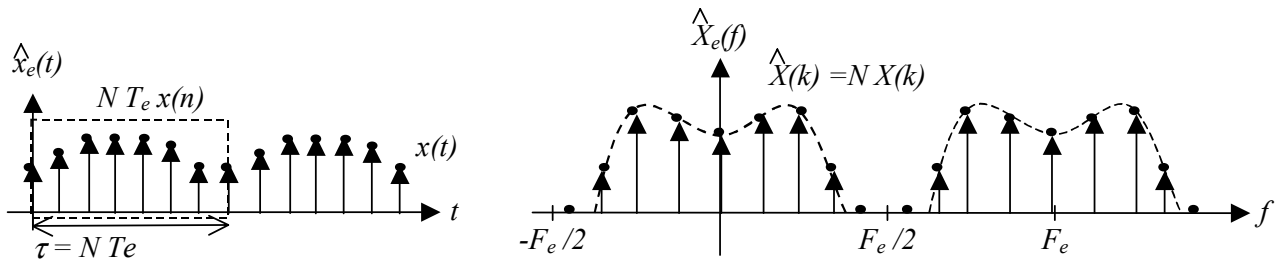


Figure 8 : Echantillonnage en fréquence et périodisation en temps

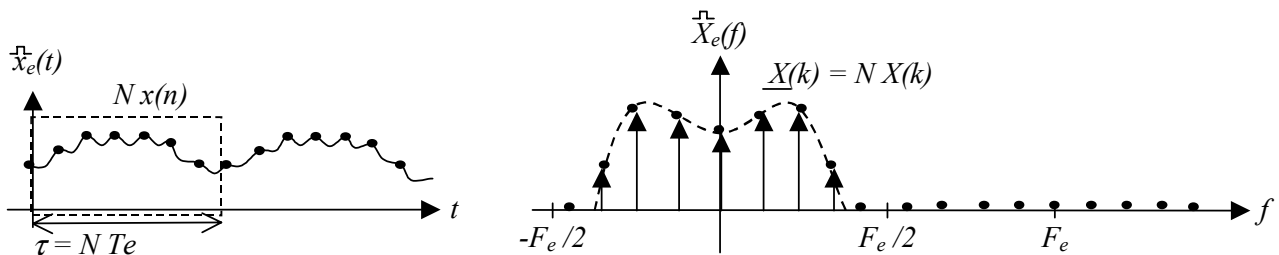


Figure 9 : Limitation du nombre d'échantillons en fréquence et rééchantillonnage en temps (TFDI)

5. Résumé et propriétés

On redéfinit les notations

1) TFD :

$\{X(k)\} = TFD[\{x(n)\}]$ avec chaque échantillon déterminé par :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

On note généralement $e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$ par W_N ce qui permet d'écrire la TFD sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & & W_N^{(N-1)} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

Il est à noter que les propriétés de symétrie de la matrice permettent d'effectuer de calcul de TFD à l'aide d'algorithmes rapides dits TFR ou FFT. Ces algorithmes sont basés sur des réductions successives par 2 de la matrice de transformation. **Ils sont donc efficaces lorsque N est une puissance de 2.**

2) TFDI :

$\{x(n)\} = TFDI[\{X(k)\}]$ avec chaque échantillon déterminé par :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$$

La représentation matricielle est équivalente à celle présentée pour la TFD en multipliant par $1/N$ et en remplaçant W_N^n par $W_N^{-n} = W_N^{N-n}$

3) Propriétés de la TFD

1. Périodicité la suite $\{X(k)\}$ est une suite périodique de période N .
2. Linéarité : $TFD(\alpha\{x(n)\} + \beta\{y(n)\}) = \alpha\{X(k)\} + \beta\{Y(k)\}$
3. Symétrie : si $\{x(n)\}$ est une suite réelle, alors : $X(N-k) = X^*(k)$
4. Si la suite $\{x(n)\}$ est réelle paire, alors la suite $\{X(k)\}$ est réelle paire
5. Si la suite $\{x(n)\}$ est réelle impaires, alors la suite $\{X(k)\}$ est imaginaire impaire
6. Convolution circulaire : en considérant 2 suites numériques, $\{x(n)\}$ et $\{y(n)\}$. On appelle convolution circulaire la convolution sur N point des deux suites en les considérant périodiques de période N (On rappelle que la TFD sur N point considère les signaux périodiques de période N). On a alors :

$$\{x(n)\} * \{y(n)\} = TFDI[\{X(k)\} \cdot \{Y(k)\}]$$

avec $*$: convolution circulaire définie par

$$\{x(n)\} * \{y(n)\} = \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} x(k) y(n-k) \right\}$$

avec $x(N+k) = x(k)$ et $y(N+k) = y(k)$

6. Fenêtrage

La TFD permet d'obtenir le spectre d'un signal $x(t)$ échantillonné et multiplié par une fenêtre de mesure rectangulaire de largeur $\tau = NT_e$. Cette fenêtre de mesure introduit dans le domaine fréquentiel des ondulations sur le spectre.

On peut apprécier qualitativement l'influence de cette fenêtre en raisonnant sur un signal sinusoïdal :

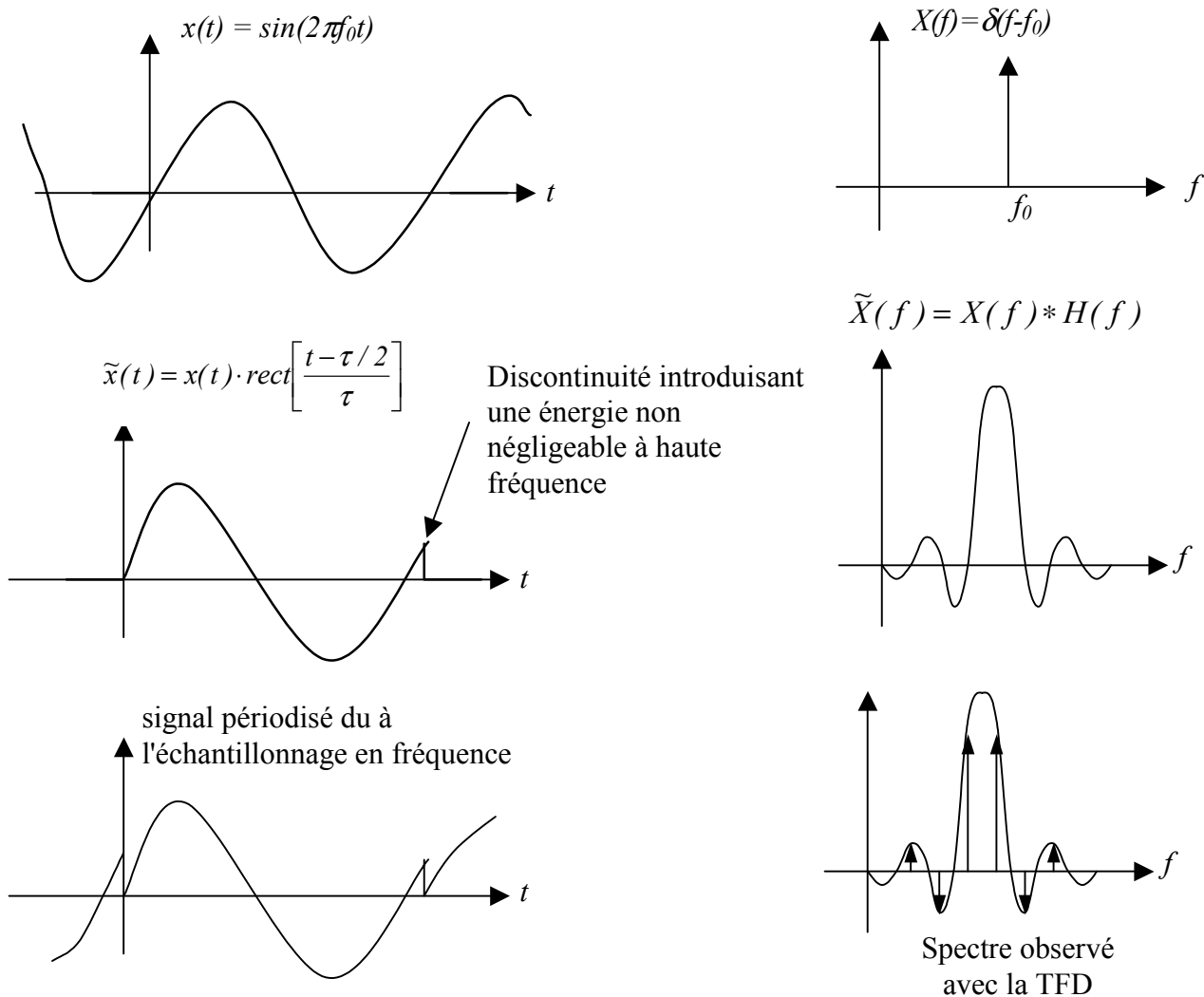


Figure 10 : Effet de la fenêtre rectangulaire sur le spectre observé

On peut remarquer sur cet exemple que le fait de tronquer le signal $x(t)$ introduit des discontinuités en temps qui se traduisent en fréquence par l'apparition de raies à des fréquences non présentes dans le signal $x(t)$.

La fenêtre temporelle de mesure introduit des "effets de bord" correspondant à des discontinuités en temps.

Solutions :

- Synchroniser le signal de manière à effectuer l'analyse sur un nombre entier de périodes (cas d'un signal périodique) la TFD correspondra alors exactement au spectre du signal analysé
- Prendre un très grand nombre de points pour augmenter la résolution lors de la discrétisation en fréquence

- c) Pondérer le signal par une fenêtre de mesure plus "douce" afin d'éliminer les discontinuités trop importantes.

1) Synchronisation

Si le signal à observer $x(t)$ est observé sur un nombre exact de périodes, $M T_0$, où T_0 est la période du signal et M un nombre entier. L'échantillonnage en fréquence s'effectue au pas $\Delta f = \frac{F_e}{N}$.

$$\tau = NT_e = MT_0 \Leftrightarrow F_0 = \frac{M}{N} F_e = M \Delta f$$

Un signal de période T_0 présente des raies tous les kF_0 et s'exprime par :

$$X(f) * H(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(f - nF_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(f - nM\Delta f)$$

La fenêtre de mesure donne en fréquence

$$H(f) = \tau \operatorname{sinc}(\pi f \tau) = NT_e \operatorname{sinc}(\pi f NT_e) = \frac{1}{\Delta f} \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{f}{\Delta f}\right)$$

La convolution de $H(f)$ avec $X(f)$ donne :

$$X(f) * H(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{C_n}{\Delta f} \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{f - nM\Delta f}{\Delta f}\right)$$

Cette fonction s'annule tous les $f = k\Delta f$ sauf si $k = nM$. Ainsi, après échantillonnage en fréquence et limitation du nombre d'échantillon, on trouve

$$X(k) = NT_e \sum_{n=0}^{N-1} C_n \delta(k - nM) \text{ où } \delta \text{ représente le symbole de Kroenecker.}$$

2) Pondération

La synchronisation de la fenêtre de mesure et du signal à analyser est en pratique impossible. Pour limiter les discontinuités on multiplie le signal acquis par une fenêtre qui s'annule sur les bords; permettant ainsi d'adoucir les discontinuités sans trop déformer le signal.

- Diminution de la résolution fréquentielle (lobe principal plus important)
- Augmentation de la précision sur la forme générale du spectre (lobes secondaire faible)
- Augmentation de la précision sur la mesure des amplitudes maximales

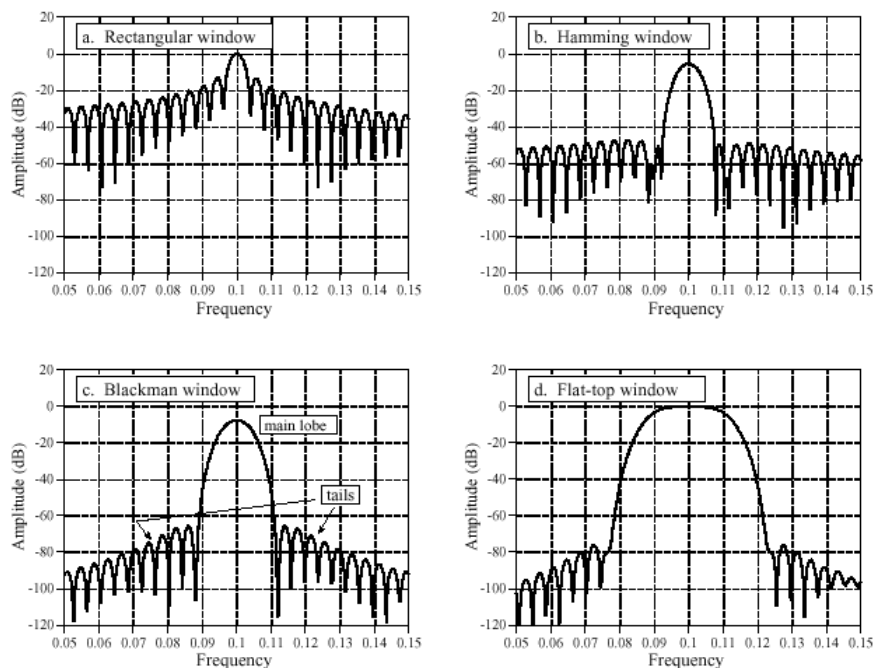


Figure 11 : Effet du fenêtrage sur 256 points appliqué à une sinusoïde de fréquence $0.1 F_e$

(Tiré de The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing <http://www.soundsoft.demon.co.uk/domains/olbook.htm>)