Traitement Numérique du Signal

Printemps 2001

Examen final

Le sujet comprend 3 exercices totalement indépendants. Dans chacun d'entre eux certaines questions sont indépendantes.
La longueur du dernier exercice ne doit pas vous effrayer; elle se justifie par de nombreuses explications censées vous éviter d'emprunter de fausses pistes.

Une annexe rappelle quelques résultats du cours.

Chaque exercice sera rédigé sur une feuille séparée.

On notera indifféremment x_n ou $x(n)$ ou $x_{(n)}$ une suite numérique $\{x(n)\}$.
Γ_n (ou u_n) représente la suite échelon unitaire.

I) Construction d'un filtre par transformation bilinéaire. (7 points)

On souhaite construire un filtre numérique passe-bas à partir de la transmittance d'un filtre analogique, en utilisant l' équivalence bilinéaire entre les variables z et p.

La fréquence d'échantillonnage, F_e , est de 10 kHz.
La fréquence de coupure souhaitée du filtre , F_o , est de 1 kHz.

La transmittance du filtre analogique initiateur s'écrit : $T(p) = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}\,\tau p+\tau^2 p^2}$.

La fréquence de coupure de ce filtre analogique est donnée par : $F_o = 1/2\pi\tau$.

1-) Déterminer la transmittance en z , T(z), du filtre numérique possédant la <u>même</u> fréquence de coupure.
Les coefficients de T(z) seront donnés avec 5 chiffres significatifs.
Il ne sera pas utile d'envisager une correction fréquentielle.

2-) Etudier la stabilité du filtre numérique obtenu.

On admettra pour la suite du problème que la transmittance en Z cherchée peut s'écrire sous la forme :

$$T(z) = \frac{1{,}00000 + 2{,}00000z^{-1} + 1{,}00000z^{-2}}{15{,}641 - 18{,}276z^{-1} + 6{,}635z^{-2}}$$

se propose , dans cette question , d' évaluer l'influence de la limitation du nombre de bits dans le s coefficients de la transmittance du filtre.

ous supposons d'autre part que cette limitation n'introduit d'erreur notable qu'au niveau du minateur de cette transmittance. On note :

$T_{des}(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$, la transmittance désirée ; $T_{reel}(z) = \dfrac{N(z)}{D_o(z)}$, la transmittance réellement obtenue

avec : $D(z) = D_o(z) + \varepsilon(z)$, $\varepsilon(z)$ est le polynôme d'erreur du dénominateur.

On suppose d'autre part que le codage des coefficients est effectué sur un nombre de bits tel qu'ils ne peuvent être implantés qu'avec 3 chiffres significatifs (*par exemple, un coefficient de valeur 16,856 sera implanté comme 16,9*).

a) Donner l'expression du polynôme $\varepsilon(z)$.

b) L'erreur relative sur T(f), module de $\underline{T}(f)$, est définie comme le module de $\dfrac{\underline{T}_{reel}(f) - \underline{T}_{des}(f)}{\underline{T}_{des}(f)}$.

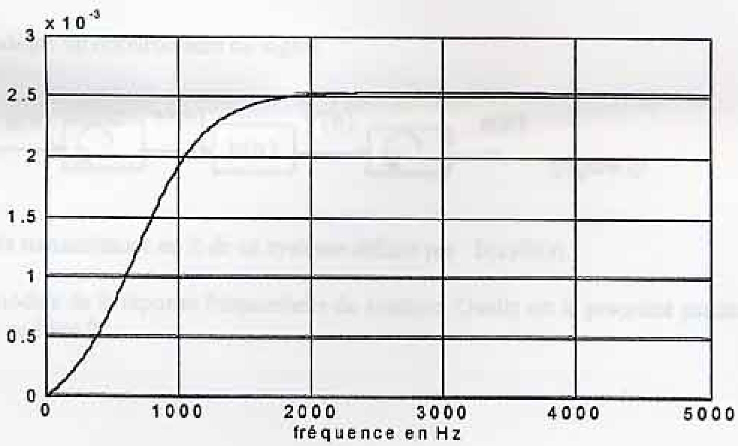
On note $\varepsilon_d(z)$ le rapport $\dfrac{\varepsilon(z)}{D(z)}$

Montrer que le module de $\underline{\varepsilon}_d(f)$, $\varepsilon_d(f)$, est ~~un majorant~~ une estimation de l' erreur relative commise.

Donner l'expression de $\varepsilon_d(z)$.

c) On représente, figure1, le module de l' erreur relative commise en fonction de la fréquence.

Evaluer en % l'erreur maximale commise à la fréquence de coupure.



(*figure 1*)

I-) Analyse d'un filtre et d'un système numérique. (7 points)

La réponse impulsionnelle d'un filtre numérique peut s'écrire : $h(n) = 0{,}8^n\,\Gamma_n$.

1)

a) Déterminer la transmittance en Z du filtre et son équation de récurrence. Le filtre est-il stable ?

b) Exprimer sa réponse fréquentielle et préciser la nature du filtre (passe-bas, passe-haut, ...).

On applique à l'entrée du filtre un signal $e_n = 2^{-n}\,\Gamma_n$.

c) Déterminer, en utilisant le produit de convolution numérique, l'expression du signal de sortie, s_n.

d) Déterminer le signal de sortie en utilisant les propriétés de la transformation en Z.

2)

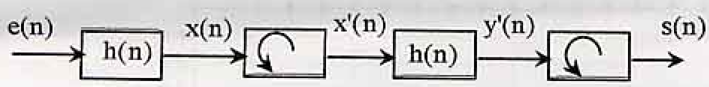
On note X(z) la transformée en Z d'un signal x_n, causal, limité à N termes (de n = 0 à n = N-1).

a) Montrer que la transformée en Z du signal x'_n obtenu par déroulement inverse (retournement) de x_n ($x'_0 = x_{N-1}$, ... , $x'_{N-1} = x_0$) peut s'écrire :

$$X'(z) = z^{-(N-1)}X(z^{-1})$$

On applique à un signal e_n les opérations décrites par le schéma ci-dessous (figure 2). Le filtre de réponse impulsionnelle h_n est le filtre précédent.

Le symbole indique un retournement du signal.



(figure 2)

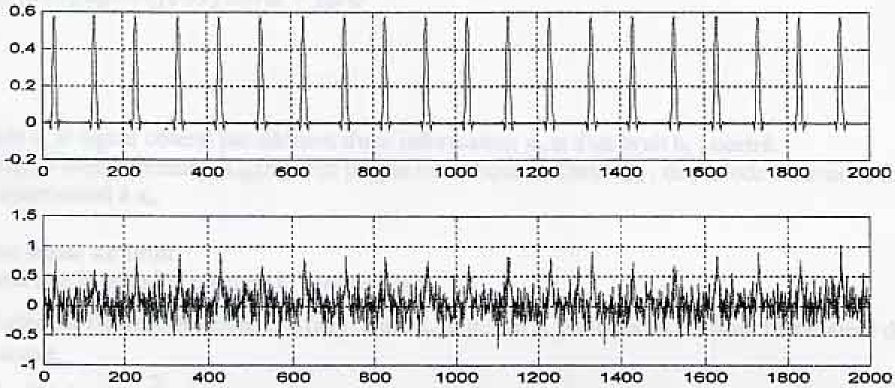
b) Déterminer la transmittance en Z de ce système définie par : S(z)/E(z).

c) Exprimer le module de la réponse fréquentielle du système. Quelle est la propriété particulière du déphasage introduit par ce filtre ?

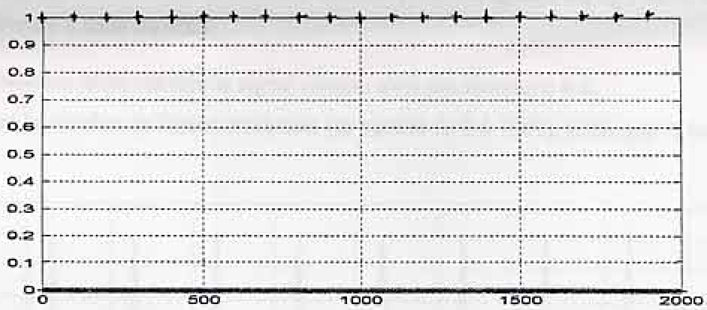
) Extraction d'un signal répétitif. (6 points)

En physiologie on peut être amené à extraire un signal répétitif (électrocardiogramme par exemple) très souvent perturbé par du bruit, s_n. La période est mesurée indépendamment du traitement appliqué.
L'extraction consiste à effectuer une intercorrélation entre le signal bruité et un signal "peigne de Dirac numérique ", p_n , de même période que s_n (le peigne est représenté à la figure 4).

La figure 3 représente le signal en l'absence de bruit, x_n, et le signal bruité, s_n (N = 2000 valeurs sont prélevées)



(*figure 3*)



(*fugure 4*)

L'objectif est de restituer le signal initial sur une période.

1) Montrer que la fonction d'intercorrélation d'un signal, s_n, et d'une impulsion de Dirac (en fait d'une suite impulsionnelle de Dirac) est égale au signal s_n.

2) La propriété précédente est simulée avec matlab par le programme ci-dessous. le signal s_n est représenté par la matrice *signfilt* .   L'instruction fir1 génère un filtre passe-bas à réponse impulsionnelle finie.

Proposer des commentaires pour expliquer à un néophyte de Matlab (mais pas un néophyte en traitement du signal) le rôle de chaque instruction (excepté l'instruction fir1).

```
00;T=100;
0:1:N-1;
signinit=0.5+0.5*square(2*pi/T*n,10);
a=fir1(50,0.22);b=[1];                    % filtrage du signal rectangulaire
signfilt=0.5*filter(a,b,signinit);
signfilt=signfilt(:,1:100);
ref=zeros(1,100);
ref(1)=1;
correl=xcorr(ref,signfilt);correl=correl(:,100:199);
plot([0:99],signfilt,[0:99],correl,'+');grid
```

3) On note s_n le signal obtenu par addition d'une information x_n et d'un bruit b_n, centré.
Montrer que l'intercorrélation, $C_{sp}(m)$ d'un peigne numérique de Dirac, p_n, de période N_0 avec s_n fournit un signal proportionnel à x_n.

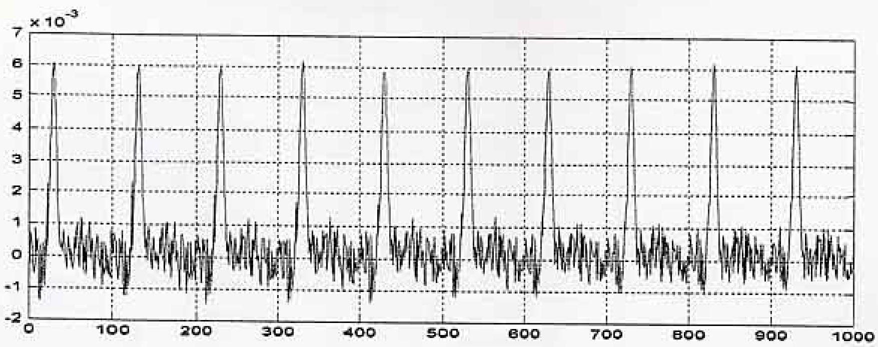
4) Rapport signal sur bruit.
On suppose que le signal s_n contient K périodes de x_n.

a) Exprimer l'intercorrélation, $\widehat{C}_{sp}(m)$, entre s_n et p_n. sur K périodes en utilisant l'estimateur donné en annexe.

b) En déduire que $\widehat{C}_{sp}(m)$ peut s'écrire sous la forme : $\widehat{C}_{sp}(m) = Ax_m + \varepsilon_m$, ce dernier terme étant fonction du bruit b_n.

c) Dans le cas où le bruit est centré, de fonction d'autocorrélation égale à $\sigma_b^2\delta_n$, montrer que la variance de ε_m est inférieure à celle du bruit.

5) En fait, l'intercorrélation étant estimée le signal obtenu n'est pas identique à x_n.
La figurer 5 représente le résultat de l'intercorrélation (m varaint de 0 à 1000), notée par la suite $\widehat{C}_{sp}(m)$



(*figure 5*)

Afin d'améliorer l'estimation de l'information sur une période, on réalise une "sommation multiple" consistant à prélever K échantillons sur $\widehat{C}_{sp}(m)$, (la taille de chaque échantillon égale à la période du signal initial N_0) et à additionner, élément par élément, ces échantillons.

ntillon est constitué d'un signal y(m) indépendant de l'échantillon considéré et d'un bruit dont la
 diffère d'un échantillon à l'autre. On note :

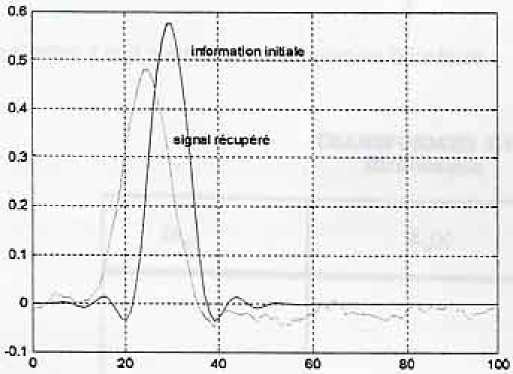
$y(m) + b_{1T}(m)$ le premier échantillon (de taille N_0) de $\widehat{C}_{sp}(m)$,

$y(m) + b_{2T}(m)$ le deuxième échantillon de $\widehat{C}_{sp}(m)$

....

Montrer que cette méthode de traitement peut permettre de reconstituer le signal initial sur une période.

6) La simulation de cette approche donne les résultats suivants :



(*figure 5*)

Proposez une explication qualitative pour la différence des signaux obtenus (on ne se préoccupera pas de la différence d'amplitude des signaux mais uniquement de leur forme).

Annexe

Formulaire

Transformée en Z d'un signal numérique x_n : $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$

Théorème du retard : $Z(x_{n-k}) = z^{-k} X(z)$.

Peigne numérique de Dirac de période N_o : $p_n = \sum_k \delta(n - kN_0)$.

Equivalence entre z et p pour une transformation bilinéaire : $p \leftrightarrow \frac{2}{T_e}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

TRANSFORMEE EN z
Dictionnaire

$\{x_n\}$	$X_z(z)$
$\delta(n-k)$	z^{-k}
Γ_n	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
$a^n \Gamma_n$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
$n\Gamma_n$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
$n^2 \Gamma_n$	$\frac{z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$
$na^n \Gamma_n$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
$(a^n \cos nb)\Gamma_n$	$\frac{z^2 - az\cos b}{z^2 - 2az\cos b + a^2}$
$(a^n \sin nb)\Gamma_n$	$\frac{az \sin b}{z^2 - 2az\cos b + a^2}$

...ules relatives au traitement des signaux aléatoires.

e_n et s_n sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie du filtre de réponse impulsionnelle h, de transmittance en Z, H(z) et de réponse fréquentielle $\underline{H}(f)$.

Autocorrélation d'un signal à puissance finie : $C_{ee}(m) = E\{e_n\, e_{n+m}\}$

Intercorrélation de deux signaux, x_n et y_n : $C_{xy}(m) = E\{x_n\, y_{n+m}\}$

Autocorrélation d'un signal à énergie finie : $C_{ee}(m) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n e_{n+m}$

Estimateur de l'intercorrélation sur KN_o (K entier) de deux signaux dont l'un est de période N_o :

$$C_{xy}(m) = \frac{1}{K}\sum_n x_{n+m} y_n$$

Transformée en Z d'une fonction d'autocorrélation : $S_{ee}(z)$.

Transformée de Fourier d'une fonction d'autocorrélation : $\underline{S}_{ee}(f)$.

Théorème de Parseval.

Signal à énergie finie : $\sum_{n=0}^{\infty} e_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} E^2(f)df$

$\underline{E}(f)$ est la T. de F. de e_n et $E^2(f) = \underline{E}(f)\,\underline{E}^*(f)$, la densité spectrale d'énergie

Signal à puissance finie : $P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ee}(f)df$

$S_{ee}(f)$ est la densité spectrale de puissance.

Théorème de Wiener Kintchine pour un signal centré : $P = C_{ee}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ee}(f)df$