P2000

# Traitement Numérique du Signal
# Final 2000

Le sujet comporte 3 exercices indépendants. Un formulaire donné en annexe rassemble quelques formules vues en cours .

**Les 3 exercices seront rédigés sur des feuilles séparées.**

## I-) Etude d'un filtre numérique.

Les signaux d'entrée et de sortie du filtre étudié, e(n) et s(n) sont liés par l'équation de récurrence :

$s(n) = \sum_{i=0}^{p} e^{-ai} e(n-i)$ , $a$ est un nombre réel.

**1)** Exprimer la réponse impulsionnelle du filtre . Ce filtre est-il à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? Justifier votre réponse.

**2)** Déterminer la transmittance en Z du filtre. Elle sera exprimée en fonction de $a$ , $p$ et $z$.

**3)** En déduire une expression de la réponse fréquentielle du filtre.
Le module de cette dernière, pour a = 0,1, est représenté sur la figure 1 en fonction de la fréquence réduite $f_r$ = fréquence/ $F_e$ ($F_e$ est la fréquence d'échantillonnage). En déduire la fréquence réduite de coupure du filtre.

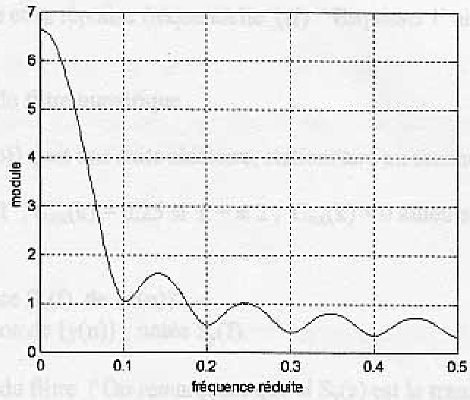
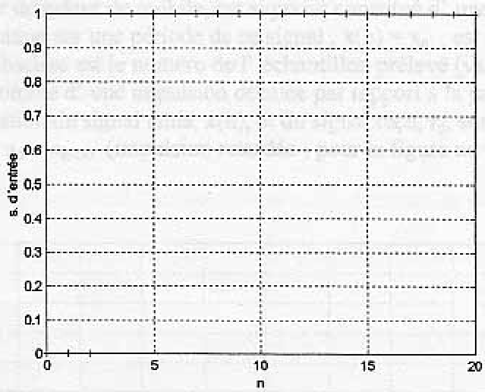



Figure 1.

**4)** Le signal d'entrée est à présent celui représenté sur la figure 2.

Figure 2.




**a)** En utilisant la transformation en Z, déterminer l'expression du signal de sortie du filtre.
**b)** En déduire le régime permanent du signal de sortie (limite de ce signal quand $n \rightarrow \infty$ ).

---

## II) Filtrage linéaire d' une suite aléatoire.

On considère le filtre numérique d' équation de récurrence : $y_n = 0.5\, x_n + 0{,}5\, x_{n-1}$ .

**1)** Déterminer la transmittance en z du filtre et sa réponse fréquentielle $\underline{T}(f)$ . Esquisser l' allure de la variation de $T^2(f)$ en fonction de la fréquence.

**2)** Calculer la réponse impulsionnelle h(n) du filtre numérique.

Le signal appliqué à l' entrée du filtre, {x(n)} , est une suite aléatoire, stationnaire au second ordre, centrée , de fonction d' autocorrélation :
$C_{xx}(k) = 1$ si $k = 0$ , $C_{xx}(k) = 0{,}5$ si $k = \pm 1$ , $C_{xx}(k) = 0{,}25$ si $k = \pm 2$ , $C_{xx}(k) = 0$ ailleurs .

**3)**
**a)** Calculer la densité spectrale de puissance $S_x(f)$ de {x(n)} .
**b)** Calculer la densité spectrale de puissance de {y(n)} , notée $S_y(f)$.

**4)** Calculer la puissance du signal en sortie du filtre ( On remarquera que si $S_y(z)$ est la transformée en Z de Cyy(k) , alors : $S_y(z) = T(z)\ T(z^{-1})\ S_x(z)$ ).

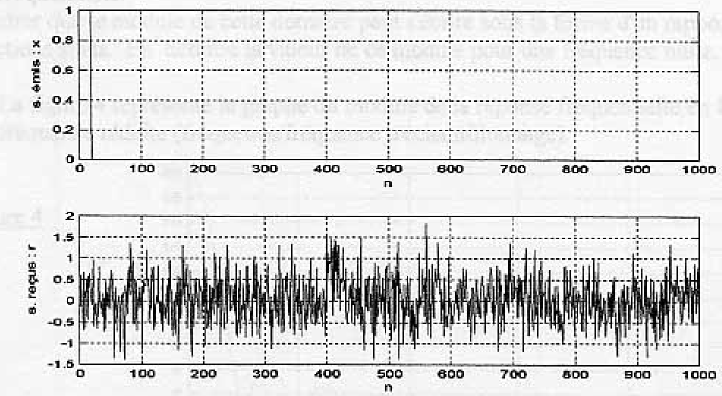
---

## III) Filtrage adapté d'un écho radar.

Le signal d' émission d' un radar détecteur de mobile, est supposé constitué d' une succession périodique d' impulsions . La numérisation sur une période de ce signal , $x(n) = x_n$ , est représentée sur la figure 1 (signal émis) : la variable d' abscisse est le numéro de l' échantillon prélevé (variable n).

L' écho reçu par le radar est la somme d' une impulsion décalée par rapport à la précédente, u, et d' un bruit blanc centré, $b_n$. Une numérisation du signal émis, x(n), et du signal reçu, $r_n$, sont représentés sur la figure 3 . $r_n = u_n + b_n$ avec $u_n = x_{n-no}$ (impulsion retardée ; pour la figure no = 400) .

Figure 3




Le niveau du bruit empêche une lecture directe du retard sur un chronogramme du signal reçu.
On se propose d' étudier une technique numérique d' estimation du retard .

Le filtre adapté auquel est soumis le signal reçu, est celui qui assure le meilleur rapport signal/bruit .

On note $y_n = y_{un} + y_{bn}$ le signal en sortie du filtre. $y_{un}$ et $y_{bn}$ sont les réponses du filtre aux signaux $u_n$ et $b_n$ appliqués seuls. Le filtre est donc linéaire. Il est d'autre part supposé à réponse impulsionnelle finie, d'ordre P et d'équation de récurrence : $y_n = \sum_{i=0}^{P} h_i \, r_{n-i}$ .

**1)** Calcul de la puissance de bruit en sortie du filtre.
On note $\sigma_b^2$ la densité spectrale de puissance du bruit en entrée. Montrer que la puissance de bruit, en sortie, $E\{Y_{bn}^2\}$ peut s'écrire : $\sigma_b^2 \sum_{i=0}^{P} h_i^2$ .

**2)** Calcul de ~~L'énergie~~ la puissance utile du signal, $E\{Y_{un}^2\}$.
Cette puissance pourrait être estimée à partir de la connaissance de N valeurs de $y_{un}$ à l'aide de l'estimateur : $\hat{P}_u = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y_{un}^2$ .

a) Montrer que : $\hat{P}_{mu} \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\left(\sum_{i=0}^{P} h_i^2\right)\left(\sum_{i=0}^{P} u_{n-i}^2\right)\right]$

b) Dans quelle condition la puissance est-elle maximale ?

**3)** En fait le signal $u_{n-i}$ est inconnu. Les coefficients de la réponse impulsionnelle du filtre sont calculés, par " retournement " , à partir du signal émis.

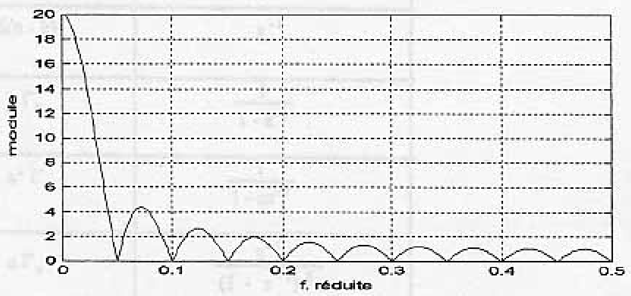
Pour cette question , la durée de l'impulsion émise est de 20 unités, sa hauteur est supposée égale à 1 unité. et $P = 30$.

**a)** Déterminer la transmittance en Z du filtre adapté et l'expression de sa réponse fréquentielle.

Montrer que le module de cette dernière peut s'écrire sous la forme d'un rapport de deux fonctions sinus. En déduire la valeur de ce module pour une fréquence nulle.

**b)** La figure 4 représente le graphe du module de la réponse fréquentielle en fonction de la fréquence réduite (fréquence/fréquence d'échantillonnage).

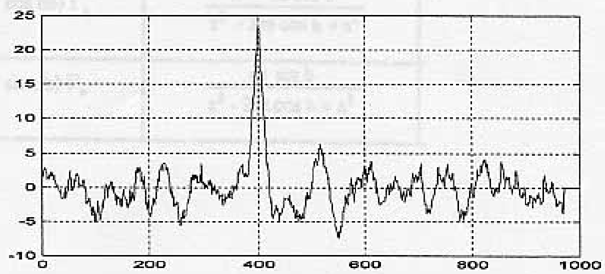
Figure 4




Cette réponse est-elle en accord avec les résultats de la question précédente ?
Quel est le retard introduit par le filtre numérique dans la réponse à un échelon ?

**4)** La réponse du filtre au signal $r_n$ , représenté figure 3, est donnée ci-dessous (figure 5).

Figure 5.




Le filtre introduit un retard supplémentaire dont il a été tenu compte pour représenter $y_n$ .
Il est dés lors possible de déterminer la "date numérique, $n_o$" de retour du signal réfléchi par la cible.
Proposer un programme Matlab permettant de déterminer cette date.

# Formulaire

**TRANSFORMEE EN z**
**Dictionnaire**

| $\{x_n\}$ | $X_z(z)$ |
|---|---|
| | |
| $\delta(n-k)$ | $z^{-k}$ |
| $\Gamma_n$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}$ |
| $a^n \Gamma_n$ | $\frac{1}{1-az^{-1}}$ |
| $n\Gamma_n$ | $\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ |
| $n^2 \Gamma_n$ | $\frac{z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$ |
| $na^n \Gamma_n$ | $\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ |
| $(a^n \cos nb)\Gamma_n$ | $\frac{z^2 - az\cos b}{z^2 - 2az\cos b + a^2}$ |
| $(a^n \sin nb)\Gamma_n$ | $\frac{az \sin b}{z^2 - 2az\cos b + a^2}$ |

**Formules relatives au traitement des signaux aléatoires.**

$e_n$ et $s_n$ sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie du filtre de réponse impulsionnelle h, de transmittance en Z, H(z) et de réponse fréquentielle $\underline{H}(f)$.

Autocorrélation d'un signal à puissance finie : $C_{ee}(m) = E\{e_n\, e_{n+m}\}$

Autocorrélation d'un signal à énergie finie : $C_{ee}(m) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n e_{n+m}$

Transformée en Z d'une fonction d'autocorrélation : $S_{ee}(z)$.

Transformée de Fourier d'une fonction d'autocorrélation : $\underline{S}_{ee}(f)$ .

Relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie du filtre :

$$S_{ss}(z) = H(z)\, H(z^{-1})\, S_{ee}(z).$$
$$S_{ss}(f) = \underline{H}^2(f)\, S_{ee}(f)$$
$$S_{es}(f) = \underline{H}(f)\, S_{ee}(f)$$

Théorème de Parseval.

Signal à énergie finie : $\sum_{n=0}^{\infty} e_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} E^2(f)\,df$

$\underline{E}(f)$ est la T. de F. de $e_n$ et $E^2(f) = \underline{E}(f)\,\underline{E}^*(f)$ , la densité spectrale d'énergie

Signal à puissance finie : $P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ee}(f)\,df$

$S_{ee}(f)$ est la densité spectrale de puissance.

Théorème de Wiener Kintchine pour un signal centré : $P = C_{ee}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ee}(f)\,df$